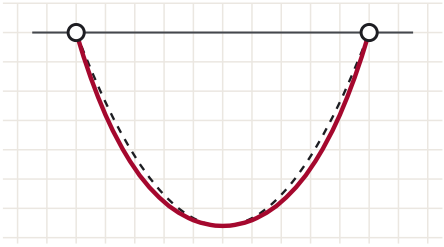
ACTIVITAT 1 · CAPÍTOL 01 · LA CATENÀRIA

Penja una cadena

Galileu va escriure que una cadena penjada dibuixa una paràbola, i que l'encert és més gran com menys penja. Amb una cadeneta, dues xinxetes i un regle ho pots comprovar.



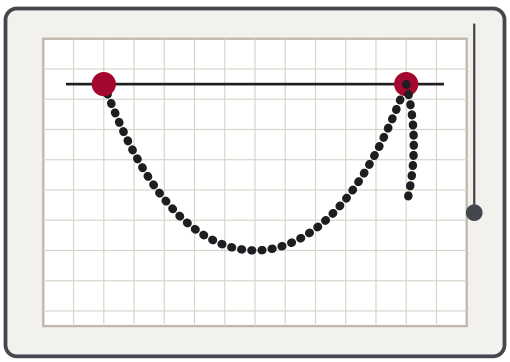
Nom _____ Grup _____ Data _____

DURADA	50 minuts
AGRUPAMENT	Grups de tres
MATERIAL	Una cadeneta de boles d'uns 50 cm (com les de les persianes o dels clauers), dues xinxetes, una planxa de suro o un cartró gruixut, la graella de la pàgina 3, regle, llapis i tres colors.

Prediu Abans de penjar la cadena: quina forma creus que farà? Dibuixa-la a mà alçada entre els dos punts.

1 Penja la cadena

1. Imprimeix la graella sense ajustar-ne la mida i comprova amb el regle que la barra de control fa 5 cm.
2. Enganxa la graella al suro i posa'l dret contra la paret. La línia d'A a B ha de quedar horitzontal.
3. Clava una xinxeta a A i una altra a B i penja-hi la cadena. Allarga-la o escurça-la fins que el punt més baix toqui V_1, 5 cm per sota. La cadena que sobri, deixa-la penjar per fora de les xinxetes.
4. Quan estigui quieta, fes un punt de color allà on la cadena travessa cada línia vertical marcada. Treu la cadena i uneix els punts.
5. Torna a penjar-la, ara més llarga, fins que toqui V_2, 15 cm per sota, i repeteix el pas 4 amb un altre color.



la graella al suro, les xinxetes i el clip

Un clip penjat d'un fil et marca la vertical. La gravetat també serveix per a això.

2 Calcula la paràbola

La paràbola que passa per A, per B i pel punt més baix es pot calcular punt a punt. Si x és la distància al centre, en centímetres, la profunditat per sota de la línia AB és:

Paràbola de 5 cm: profunditat = $5 - x \times x \div 20$

Paràbola de 15 cm: profunditat = $15 - 0{,}15 \times x \times x$

x (cm)	0	2	4	6	8	10
Paràbola de 5 cm	5					0
Paràbola de 15 cm	15					0

> La corba és simètrica: a $x = -4$ la profunditat és la mateixa que a $x = 4$. Marca els punts de la taula a banda i banda del centre amb el tercer color i uneix-los.

3 Compara

P1 Amb la cadena de 5 cm, quina és la distància més gran entre la cadena i la paràbola? _____ mm

P2 I amb la de 15 cm? _____ mm. On és més gran la diferència: a prop del centre, a prop de les xinxetes o a mig camí?

P3 La cadena queda per sobre o per sota de la paràbola?

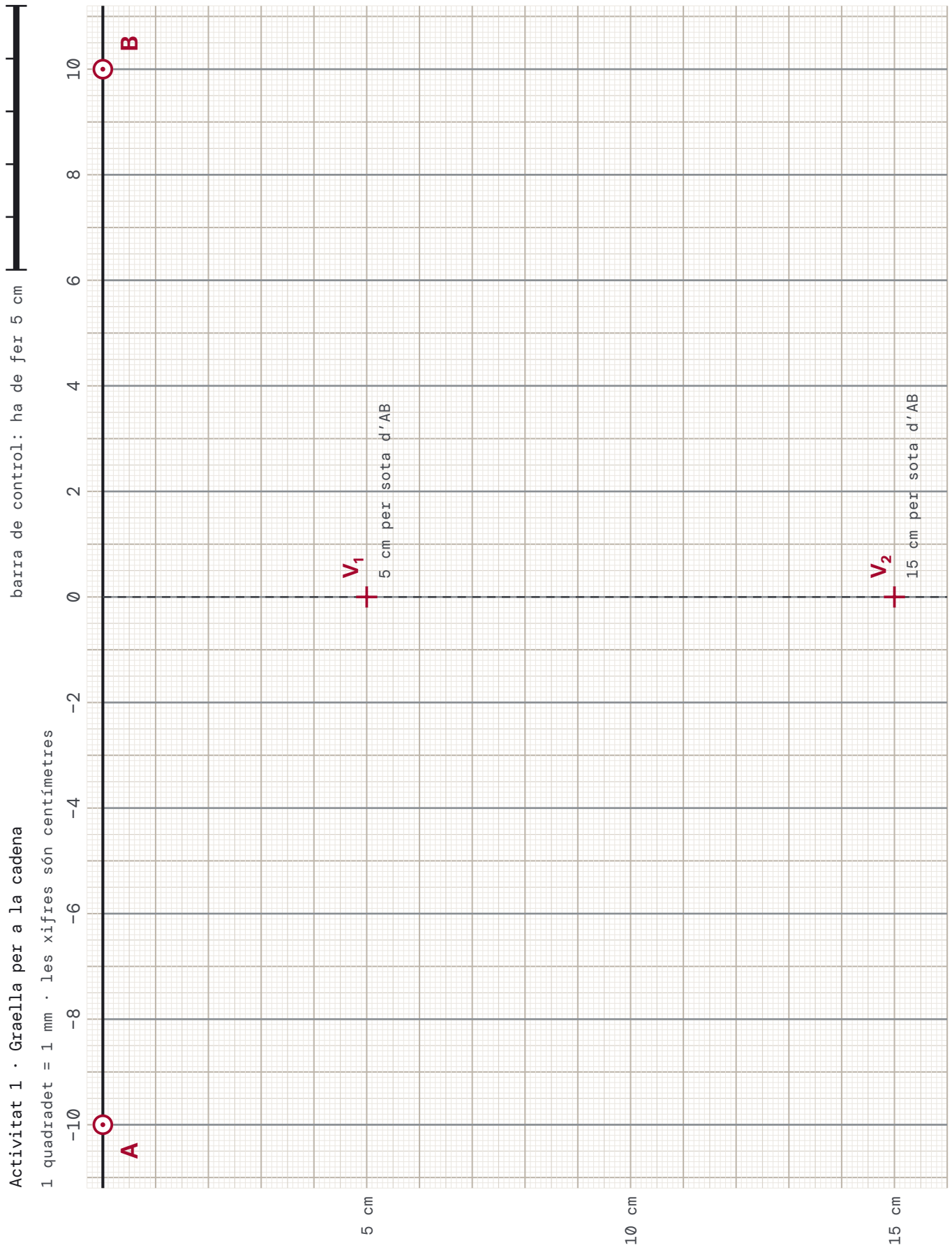
P4 Galileu deia que l'encert és més gran com menys penja la cadena. Les teves mesures li donen la raó? Explica-ho amb dues de les teves dades.

P5 Gira el full de cap per avall: la cadena s'ha convertit en un arc. Dibuixa fletxes en tres punts de l'arc que mostrin cap on empeny cada tros d'arc el tros que té a sota. Les voltes gòtiques necessitaven contraforts, uns murs de suport per fora de l'edifici, i Gaudí en deia «crosses». Per què creus que el seu arc no en necessita?

PER ANAR MÉS LLUNY

Busca catenàries fora de classe: un cable entre dos pals, el fil d'estendre la roba, una cadena penjada entre dos pilons. A l'àtic de la Pedrera, a Barcelona, n'hi ha 270, de maó i del revés: són els arcs que aguanten la teulada.

Gira el full un quart de volta cap a la dreta, perquè la línia AB quedi a dalt. Abans de començar, comprova amb el regle que la barra de control fa 5 cm.



Penja una cadena

SOLUCIONS I NOTES

OBJECTIUS

Calcular i representar punts a partir d'una expressió, operar amb decimals, comparar una mesura amb un model i explicar per què una forma serveix per construir.

SABERS

Sentit algebraic (taules i gràfiques a partir d'una expressió) · Sentit numèric (decimals) · Sentit de la mesura.

CONSELLS

- La cadeneta de boles es ven a les ferreteries, per a persianes, i es talla amb unes alicates. Un collaret prim també serveix.
- Comproveu la barra de control: si la impressora ha reduït el full, les mesures no quadraran amb la taula.
- Sense suro, un cartró gruixut enganxat a la paret i la cadena fixada amb cinta adhesiva a A i B fan el mateix servei.
- El suro ha d'estar vertical. Si s'inclina, la cadena frega el paper i no penja lliure.

PER QUÈ LA CADENA NO ÉS UNA PARÀBOLA

Una paràbola és la forma d'un cable que aguanta un pes repartit per igual en horitzontal, com el tauler d'un pont penjant. La cadena té el mateix pes per cada centímetre de cadena, i a prop de les xinxetes, on va més dreta, hi ha més cadena per cada centímetre d'amplada. La corba exacta és la catenària, $y = a \cdot \cosh(x / a)$, que van trobar el 1691 Leibniz, Huygens i Johann Bernoulli, cadascú pel seu compte.

SOLUCIONS

x (cm)	0	2	4	6	8	10
Paràbola 5	5	4,8	4,2	3,2	1,8	0
Cadena 5*	5	4,8	4,2	3,3	1,9	0
Paràbola 15	15	14,4	12,6	9,6	5,4	0
Cadena 15*	15	14,6	13,2	10,7	6,5	0

* Valors calculats amb la catenària. Les mesures reals poden variar 1 o 2 mm per punt.

- P1 Menys d'1 mm (0,9 mm com a molt, cap a $x = \pm 7$). A la pràctica coincideixen.
- P2 Uns 12 mm, entre el centre i les xinxetes, més a prop de les xinxetes (cap a $x = \pm 7$). A les línies marcades es veuen uns 11 mm, a $x = \pm 8$.
- P3 Per sota: la cadena baixa més que la paràbola.
- P4 Sí: menys d'1 mm quan la cadena penja poc, més d'1 cm quan penja molt.
- P5 Les fletxes van al llarg de l'arc, tangents a la corba. L'empenta segueix la forma de l'arc fins a terra: no se n'escapa res de la pedra, i no cal res a fora que l'aguanti. A les voltes gòtiques, l'empenta arriba a dalt dels murs i s'ha de portar a terra amb contraforts i arcbotants.

Per continuar: el capítol 01 de crm.cat/les-matematiques-de-gaudi, amb una cadena que es pot girar, i el vídeo «Catenàries per superar el gòtic» (ESO) a educa.sagradafamilia.org.

PER LLEGIR MÉS

- Block, P., DeJong, M. i Ochsendorf, J. (2006). «As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches». *Nexus Network Journal*, 8(2), 13–24. Es pot llegir de franc al web del MIT.
- Fernández Jiménez, A. (2020). «La catenaria y su influencia en la arquitectura de Gaudí». *La Gaceta de la RSME*, 23(2), 303–323.

La bibliografia completa, amb enllaços, és a crm.cat/les-matematiques-de-gaudi.