

El problema del subespacio invariante



Ignacio González Cimas

Tutor: Eduard Vilalta Vila

Introducción y motivación

El problema del subespacio invariante constituye una de las cuestiones centrales de la teoría de operadores. Para entender este problema, recordamos que para toda aplicación lineal T en un espacio vectorial X de dimensión finita y mayor que uno (es decir, T es una matriz) existe un elemento del espacio $x \in X \setminus \{0\}$ de tal manera que

$$Tx = \lambda x$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si consideramos ahora el conjunto

$$S_\lambda = \ker(T - \lambda I) = \{x \in X : Tx = \lambda x\},$$

observamos que S_λ es un subespacio cerrado no trivial e invariante por T siempre que la aplicación considerada no sea múltiplo de la identidad.

El problema del subespacio invariante generaliza lo anterior para espacios de cualquier dimensión. En términos generales, este problema plantea si todo operador lineal y continuo definido sobre un espacio de Banach de dimensión mayor que uno posee algún subespacio cerrado no trivial e invariante por dicho operador. Dicho de otra forma, dado un espacio de Banach X de dimensión mayor que uno y un operador $T : X \longrightarrow X$ lineal y continuo, el problema plantea la pregunta de si tenemos garantizada la existencia de un subespacio cerrado $M \subset X$ de tal manera que

$$\{0\} \neq M \neq X \quad \text{y} \quad T(M) \subset M.$$

La importancia de este problema reside en que la existencia de subespacios invariantes permite descomponer el operador T en operadores más sencillos, ya que podríamos considerar la aplicación restringida $T : M \longrightarrow M$, así como el operador inducido en el espacio cociente X/M .

En espacios vectoriales complejos de dimensión finita, tal y como hemos visto anteriormente, el problema del subespacio invariante tiene una respuesta afirmativa siempre que la dimensión sea mayor que uno. Sin embargo, al pasar a dimensión infinita aparecen dificultades que no permiten utilizar el mismo razonamiento que

para el caso matricial. Por ejemplo, un operador puede no tener autovalores o incluso puede haber elementos en el espectro que no son autovalores. Todo esto hace que los argumentos matriciales basados en la existencia de autovalores dejen de ser válidos en el caso infinito-dimensional.

Una primera estrategia para abordar el problema del subespacio invariante es estudiar su respuesta en determinadas clases de operadores. Los operadores autoadjuntos y los operadores normales son un ejemplo de ello. Sus respectivos teoremas espectrales permiten demostrar una equivalencia unitaria entre estos operadores y los operadores de multiplicación en espacios L^2 , lo cual hace posible garantizar la existencia de subespacios invariantes no triviales tanto para operadores autoadjuntos como normales.

Otra clase de operadores que tienen respuesta positiva al problema del subespacio invariante son los operadores compactos. Estos operadores se caracterizan por recuperar de manera parcial algunas características de las matrices en dimensión finita, como que los subespacios fundamentales de los autovalores no nulos tienen dimensión finita. Sin embargo, la verdadera importancia de los operadores compactos se encuentra en el problema del subespacio invariante y se manifiesta en el teorema de Lomonosov. Este resultado garantiza que si tenemos un operador T que no es múltiplo de la identidad y que conmuta con un operador compacto, entonces no solo existe un subespacio invariante por T , sino que también será invariante por todos los operadores que conmuten con T . Como consecuencia, obtenemos que los operadores compactos siempre tienen un subespacio invariante.

El teorema de Lomonosov proporciona así una condición muy general que garantiza la existencia de subespacios invariantes. Sin embargo, no todos los operadores satisfacen esta condición. En este trabajo, se construye un ejemplo de un operador que no conmuta con ningún operador compacto. Dada una sucesión β , se construye el espacio de funciones analíticas con pesos $H^2(\beta)$, el operador considerado será el de multiplicación por z :

$$M_z f(z) = zf(z).$$

El objetivo será ver que, para una elección apropiada de β , el único operador compacto que conmuta con ciertos operadores de multiplicación es el operador nulo. Este análisis permite comprender que las hipótesis del teorema de Lomonosov, aunque muy amplias, no abarcan todos los operadores de interés, lo cual nos puede hacer pensar que en general no tenemos garantizada la existencia de subespacios invariantes.

La construcción de un operador sin ningún subespacio cerrado invariante no trivial requiere modificar cuidadosamente tanto el espacio de Banach como la norma

utilizada. En el último capítulo del trabajo consideraremos el espacio de polinomios $P[z]$ dotado de una base especialmente diseñada, dependiente de dos sucesiones de números naturales (a_n) y (b_n) que crecerán suficientemente rápido. A partir de esta base se definirá una norma de tipo ℓ^1 y se tomará la completación del espacio de polinomios respecto de ella. El espacio de Banach resultante, denotado por E , será isométricamente isomorfo a ℓ^1 .

Sobre este espacio se estudiará el operador de multiplicación por la variable,

$$Tp(z) = zp(z).$$

Finalmente, demostraremos que T no posee ningún subespacio cerrado invariante no trivial, demostrando así que la respuesta general al problema del subespacio invariante es negativa.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el problema del subespacio invariante desde estas dos perspectivas complementarias. Por una parte, se presentarán distintas situaciones en las que la existencia de subespacios invariantes puede garantizarse mediante herramientas espectrales, geométricas o de compacidad. Por otra parte, se analizará una construcción que muestra que estas conclusiones no pueden extenderse a todos los operadores sobre espacios de Banach. El contraste entre los resultados afirmativos y el contraejemplo final permite apreciar tanto la profundidad del problema como las diferencias esenciales entre la teoría de operadores en espacios de Hilbert y en espacios de Banach generales.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el primer capítulo se introducen los preliminares de análisis funcional necesarios para el desarrollo posterior. Se recuerdan las nociones de espacio de Banach y de Hilbert, operador adjunto, operador compacto, espectro y operador de multiplicación, así como los teoremas espectrales. En el segundo capítulo se formula el problema del subespacio invariante y se estudian algunos casos afirmativos. Se introduce la noción de punto cíclico, se analiza el caso de los espacios no separables y se estudian los operadores autoadjuntos mediante su representación como operadores de multiplicación. Posteriormente, se presenta el teorema de Lomonosov y se analiza un ejemplo de operador que no satisface sus hipótesis. Finalmente, en el último capítulo se construye un espacio de Banach y un operador que no posee subespacios cerrados invariantes no triviales, proporcionando así una respuesta negativa al problema en el contexto general de los espacios de Banach.

El presente trabajo ha sido realizado en el marco del BIMR (Barcelona Introduction to Mathematical Research), junto con Eduard Vilalta Vila. Su desarrollo ha comprendido el estudio conjunto de los principales resultados afirmativos relacionados

con el problema del subespacio invariante, así como el análisis detallado de una construcción que proporciona un contraejemplo en el contexto de los espacios de Banach.