

La paradoxa de Banach-Tarski
i el semigrup de tipus d'equidescomponibilitat

Raúl Toribio Abalde

Tutor: Joan Claramunt Carós

Juliol 2026

Índex

1	La paradoxa de Banach-Tarski	5
1.1	Conjunts paradoxals	5
1.2	La paradoxa de Hausdorff	8
1.3	La paradoxa de Banach-Tarski	9
1.4	El teorema de Banach-Schröder-Bernstein	13
1.5	Versió forta de la paradoxa de Banach-Tarski	16
2	La dicotomia de Tarski	19
2.1	Semigrup de tipus d'equidescomponibilitat	19
2.2	Alguns exemples de semigrups de tipus	21
2.3	Definició de $S(G, X)$ per propietat universal	23
2.4	Propietats de $S(G, X)$	25
2.5	La dicotomia de Tarski	27
	Bibliografia	33

Capítol 1

La paradoxa de Banach-Tarski

La paradoxa de Banach-Tarski és un resultat demostrat per Stefan Banach i Alfred Tarski el 1924 que afirma que podem prendre una bola de l'espai tridimensional, dividir-la en un nombre finit de peces, i recol·locar aquestes utilitzant isometries de l'espai (és a dir, rotar-les i traslladar-les) de forma que obtinguem dues còpies idèntiques de la bola original.

Aquest resultat es considera paradoxal perquè totes les operacions que es realitzen sobre la bola preserven el seu volum però, tot i això, el volum final és el doble de l'inicial. El truc que fa que la paradoxa pugui ser certa és que les peces en què dividim la bola no són mesurables, és a dir, no tenen un volum ben definit. Per tant, en rotar-les i traslladar-les no n'estem necessàriament preservant el volum; de fet, aquesta frase ni tan sols té sentit: les peces no tenen un “volum” que es pugui preservar!

L'ingredient clau per a demostrar la paradoxa és l'axioma de l'elecció, que és el que ens permetrà definir aquestes peces. Com en tota aplicació de l'axioma de l'elecció, però, la definició serà no constructiva: sabrem que existeixen unes tals peces, però no sabrem descriure-les explícitament. Qualsevol demostració de la paradoxa de Banach-Tarski utilitza l'axioma de l'elecció en un punt o un altre; de fet, se sap que són enunciats equivalents.

L'objectiu d'aquest primer capítol és donar una demostració de la paradoxa de Banach-Tarski.

1.1 Conjunts paradoxals

Comencem definint què és un conjunt paradoxal sota l'acció d'un grup. Informalment, significa que el conjunt es pot dividir en un nombre finit de peces de manera que si movem aquestes per l'acció del grup obtenim dues còpies del conjunt original. Amb aquesta nova terminologia, la paradoxa de Banach-Tarski es pot reexpressar dient que les boles tridimensionals són $SE_3(\mathbb{R})$ -paradoxals,

on $SE_3(\mathbb{R})$ és el grup d'isometries de l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$ que preserven l'orientació.

Definició 1.1.1. Sigui X un conjunt i G un grup que actua sobre X . Diem que X és *G-paradoxal* si existeixen subconjunts $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq X$ disjunts dos a dos i elements $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tals que

$$X = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j.$$

Observació 1.1.1. Fent els subconjunts A_i , $i = 1, \dots, n$ (resp. B_j , $j = 1, \dots, m$) més petits, si cal, podem suposar que $\{g_i A_i\}_i$ (resp. $\{h_j B_j\}_j$) són disjunts.

Observació 1.1.2. També podem suposar que $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ recobreixen X , és a dir, que $X = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_m$, però per a fer-ho ens caldrà el teorema de Banach-Schröder-Bernstein, que demostrarem més endavant.

Exemple 1.1.1. El grup lliure de rang 2, F_2 , és F_2 -paradoxal, on F_2 actua sobre F_2 operant per l'esquerra. En efecte, prenem dos generadors σ, τ de F_2 i denotem per $W(\sigma)$ (resp. $W(\sigma^{-1}), W(\tau), W(\tau^{-1})$) el conjunt de paraules (reduïdes) de F_2 que comencen per σ (resp. $\sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}$). Aleshores,

$$F_2 = W(\sigma) \sqcup \sigma W(\sigma^{-1}) = W(\tau) \sqcup \tau W(\tau^{-1}),$$

i això mostra que F_2 és F_2 -paradoxal.

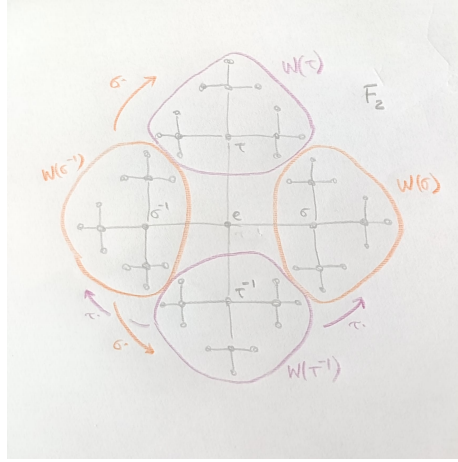


Figura 1.1: La paradoxa vista en el graf de Cayley de F_2 . Disposem els elements de F_2 en forma de graf, amb arestes verticals unint cada paraula $w \in F_2$ amb τw i arestes horitzontals unint cada paraula $w \in F_2$ amb σw ; el graf resultant és un arbre infinit de caràcter fractal.

Podem traslladar paradoxes en un grup a paradoxes en conjunts en què actui sense punts fixos no trivials, és a dir, en què l'únic element $g \in G$ que deixi algun punt de X fix sigui l'element neutre $g = e$. En general, per a fer-ho cal utilitzar l'axioma de l'elecció:

Proposició 1.1.1. *Si G és G -paradoxal (respecte a l'acció de G sobre si mateix operant per l'esquerra) i actua sobre X sense punts fixos no trivials, aleshores X és G -paradoxal.*

Demostració. La idea és que cada òrbita per l'acció de G sobre X és una còpia exacta de G (perquè G actua sobre X sense punts fixos no trivials) i, per tant, podem replicar la paradoxa en G en cadascuna de les òrbites de X . Per a fer-ho, però, ens cal escollir un element destacat en cada òrbita que representi l'element neutre de G i, per a fer això, en general (si el nombre d'òrbites és infinit no numerable) necessitem l'axioma de l'elecció.

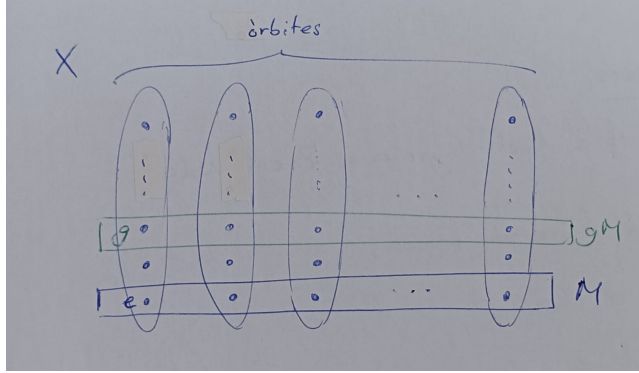


Figura 1.2: Les òrbites per l'acció de G en X i el conjunt M .

Amb l'axioma de l'elecció construïm un conjunt $M \subseteq X$ contenint exactament un element de cada òrbita (intuïtivament, són els elements de cada òrbita que representen l'element neutre de G). Suposem que G és G -paradoxal amb parts $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq G$ i elements $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$. Repliquem la paradoxa en cadascuna de les òrbites simultàniament: considerem els subconjunts

$$A_i M := \{gM \mid g \in A_i\}, \quad B_j M := \{gM \mid g \in B_j\}.$$

Són disjunts perquè els A_i, B_j ho són i perquè G actua sense punts fixos no trivials. Per exemple, si $A_i M \cap A_{i'} M \neq \emptyset$, aleshores existeixen $g_i \in A_i, g_{i'} \in A_{i'}$ i $m, m' \in M$ tals que $gm = g'm'$. Però aleshores $(g')^{-1}gm = m'$, de forma que m i m' estan en la mateixa òrbita per l'acció de G i la construcció de M implica que $m = m'$, d'on tenim que $(g')^{-1}gm = m$. Això significa, perquè l'acció no té punts fixos no trivials, que $g_i = g_{i'}$, però això no pot ser, perquè $g_i \in A_i$ i $g_{i'} \in A_{i'}$, però $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$!! Els altres casos a comprovar són completament anàlegs.

Per concloure només cal observar que

$$X = GX = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i M = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j M.$$

□

Observació 1.1.3. L'axioma de l'elecció només es necessita per a escollir un punt de cada òrbita per l'acció del grup. Per tant, si el nombre d'òrbites és finit (o fins i tot numerable) no ens cal invocar-lo: simplement numerem les òrbites i escollim un punt de cadascuna per ordre.

1.2 La paradoxa de Hausdorff

El nostre objectiu és acabar demostrant que tota bola tridimensional és $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal. Abans de fer-ho, el que farem és demostrar que l'esfera $\mathbb{S}^2$ ho és. Aquest resultat es coneix com la paradoxa de Banach-Tarski per a l'esfera. La idea per a estendre el resultat a la bola serà considerar-la com infinites esferes concèntriques i doblar totes aquestes esferes alhora.

Per tant, el nostre objectiu ara és demostrar que $\mathbb{S}^2$ és $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal. De fet, per a doblar l'esfera no ens caldrà utilitzar cap translació, és a dir, no utilitzarem tot el grup d'isometries preservant l'orientació $\text{SE}_3(\mathbb{R})$, sinó només el subgrup especial ortogonal $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. Anem a veure doncs que $\mathbb{S}^2$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.

Per a demostrar-ho, l'estratègia és trobar un subgrup de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ que sigui paradoxal i utilitzar la Proposició 1.1.1 per a traslladar la paradoxa en aquest subgrup a l'esfera. Concretament, anem a veure que $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ té un subgrup lliure de rang 2 (és a dir, isomorf a F_2), que ja hem vist que és paradoxal.

Teorema 1.2.1. *El grup $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ conté un subgrup lliure de rang 2. Concretament, les dues rotacions*

$$\sigma = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad \tau = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

generen un tal subgrup.

Demostració. Veure [4, Teorema 2.1].

□

Aquest resultat no ens permet deduir encara la paradoxa de Banach-Tarski per a l'esfera perquè l'acció del subgrup $\langle \sigma, \tau \rangle \leq \text{SO}_3(\mathbb{R})$ té punts fixos no trivials. De fet, *qualsevol* element (no trivial) $w \in \langle \sigma, \tau \rangle$ és una rotació i, per tant, deixa dos punts de $\mathbb{S}^2$ fixos: les dues interseccions de l'eix de rotació de w amb l'esfera.

Una manera d'intentar resoldre aquesta dificultat és considerar el conjunt D de tots els punts fixos de totes les rotacions (no trivials) de $\langle \sigma, \tau \rangle$ i eliminar-los

de l'esfera. Ara, per construcció, $\langle \sigma, \tau \rangle$ actua sense punts fixos sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$, així que podem utilitzar la Proposició 1.1.1 per a traslladar la paradoxa de $\langle \sigma, \tau \rangle$ a $\mathbb{S}^2 \setminus D$. Observem que $\langle \sigma, \tau \rangle$ és numerable, i cada element no trivial seu deixa exactament dos punts de $\mathbb{S}^2$ fixos. Per tant, D també és numerable. Intuïtivament, D és doncs un subconjunt molt petit de $\mathbb{S}^2$, així que gairebé hem aconseguit el nostre propòsit de doblar l'esfera. Aquest primer pas cap a la paradoxa de Banach-Tarski ja va ser demostrat per Hausdorff, i es coneix com a paradoxa de Hausdorff:

Teorema 1.2.2 (Paradoxa de Hausdorff). *Existeix un subconjunt $D \subseteq \mathbb{S}^2$ numerable tal que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.*

Demostració. És l'argument que hem donat a dalt. Basta prendre D com el conjunt de tots els punts fixos de totes les rotacions no trivials de $\langle \sigma, \tau \rangle$ i utilitzar la Proposició 1.1.1 per a traslladar la paradoxa de $\langle \sigma, \tau \rangle$ a $\mathbb{S}^2 \setminus D$. $\square$

Abans de continuar, comentem que es pot demostrar que els punts fixos de qualsevol rotació de $\langle \sigma, \tau \rangle$ sempre tenen alguna coordenada no racional o, dit d'una altra manera, que $\langle \sigma, \tau \rangle$ actua sense punts fixos no trivials sobre l'esfera racional $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ (és clar que σ i τ envien punts racionals a punts racionals). Una referència és, per exemple, [4]. Per tant, ja podem concloure (sense utilitzar l'axioma de l'elecció!) que:

Teorema 1.2.3. *L'esfera racional $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ és $\text{SO}_3(\mathbb{Q})$ -paradoxal.* $\square$

Observació 1.2.1. L'axioma de l'elecció no és necessari per a demostrar el teorema anterior perquè només es necessitaria per a utilitzar la Proposició 1.1.1, però ja hem comentat a l'Observació 1.1.3 que si el nombre d'òrbites de l'acció és finit o numerable, la demostració d'aquesta proposició tampoc el necessita. En aquest cas, com que el conjunt $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ és numerable (és un subconjunt de $\mathbb{Q}^3$, que és numerable perquè $\mathbb{Q}$ ho és), el nombre d'òrbites per qualsevol grup que hi actuï també ho ha de ser.

1.3 La paradoxa de Banach-Tarski

L'estratègia per a demostrar la paradoxa de Banach-Tarski (per a l'esfera) a partir de la de Hausdorff és trobar una relació d'equivalència en els subconjunts d'un conjunt X (en què actua un grup G) de forma que la paradoxalitat sigui un invariant per aquesta relació. Un cop que ja la tinguem definida, aprofitarem que ja sabem que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal per a concloure que $\mathbb{S}^2$ també ho és comprovant simplement que $\mathbb{S}^2$ i $\mathbb{S}^2 \setminus D$ són equivalents per aquesta relació.

La relació d'equivalència que funciona per a aquest propòsit és la de “ G -equidescomponibilitat”. Diem que dos subconjunts de X són G -equidescomponibles si podem descomposar un en un nombre finit de peces, reorganitzar-les per l'acció de G i obtenir l'altre. Formalment:

Definició 1.3.1. Suposem que G és un grup que actua sobre un conjunt X . Donats $A, B \subseteq X$, diem que A i B són G -equidescomponibles (i escrivim $A \sim_G B$) si podem posar

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$$

de forma que existeixin elements $g_1, \dots, g_n \in G$ tals que $g_i A_i = B_i$ per a cada $i = 1, \dots, n$.

Podem utilitzar la relació d'equidescomponibilitat per a donar una nova definició equivalent del concepte de conjunts paradoxals. Concretament, un conjunt X és G -paradoxal si conté dos subconjunts disjunts que siguin, cadascun d'ells, G -equidescomponibles amb el propi X . Estrictament parlant, caldria que les unions de la Definició 1.1.1 fossin disjunes, però ja s'ha comentat a l'Observació 1.1.1 que no es perd generalitat en suposar-ho. Per tant, tenim el resultat següent:

Proposició 1.3.1. *Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X . Aleshores, X és G -paradoxal si i només si existeixen dos subconjunts disjunts $A, B \subseteq X$ tals que $A \sim_G X \sim_G B$.* $\square$

Observem que $\sim_G$ és una relació d'equivalència en les parts de X :

Lema 1.3.1. *La relació $\sim_G$ és d'equivalència en $\mathcal{P}(X)$.*

Demostració. És clar que és reflexiva i simètrica per definició. Vegem que és transitiva. Suposem doncs que $A \sim_G B \sim_G C$. Això significa, d'una banda, que

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \xrightarrow{g_i} \bigsqcup_{i=1}^n B_i = B$$

(on la notació significa que $B_i = g_i A_i$) i, d'altra, que

$$B = \bigsqcup_{j=1}^m B^j \xrightarrow{h^j} \bigsqcup_{j=1}^m C^j = C$$

No podem concloure la transitivitat immediatament perquè les peces $\{B_i\}_{i=1}^n$ i $\{B^j\}_{j=1}^m$ en què hem de dividir B per a equidescomposar-lo amb A i amb C , respectivament, poden ser diferents. Podem solucionar aquest problema fent més petites les peces. Concretament, considerem (descartant les peces que resultin ser buides)

$$\begin{aligned} B_i^j &:= B_i \cap B^j, \\ A_i^j &:= g_i^{-1} B_i^j \subseteq g_i^{-1} B_i = A_i, \\ C_i^j &:= h^j B_i^j \subseteq h^j B^j = C^j. \end{aligned}$$

És clar que les noves peces $\{A_i^j\}_{i,j}$, $\{C_i^j\}_{i,j}$ continuen sent disjunes, que recobren tot A i tot C respectivament i que $(h_j g_i) A_i^j = C_i^j$, de forma que mostren que A i C són G -equidescomponibles. $\square$

Ja podem demostrar el resultat que ens interessa de cara a la demostració de la paradoxa de Banach-Tarski:

Lema 1.3.2. *Suposem que G és un grup que actua sobre un conjunt X . Siguin $A, B \subseteq X$ dos subconjunts G -equidescomponibles. Aleshores, A és G -paradoxal si i només si B és G -paradoxal. Dit d'una altra manera, la G -paradoxicalitat és invariant per la relació de G -equidescomponibilitat.*

Demostració. En efecte, ja hem observat que A sigui G -paradoxal significa que existeixen dos subconjunts $A_1, A_2 \subseteq A$ tals que $A_1 \sim_G A \sim_G A_2$. Siguin B_1 i B_2 els subconjunts de B als quals van a parar A_1 i A_2 per l'equidescomposició $A \sim_G B$; en particular, $A_1 \sim_G B_1$ i $A_2 \sim_G B_2$. Per tant, tenim que $B_i \sim_G A_i \sim_G A \sim_G B$ per a $i = 1, 2$, d'on concloem que B és G -paradoxal, perquè hem trobat dos subconjunts $B_1, B_2 \subseteq B$ tals que $B_1 \sim_G B \sim_G B_2$ (per transitivitat de $\sim_G$). $\square$

En particular, ara que ja sabem, per la paradoxa de Hausdorff, que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal, per a veure la paradoxalitat de $\mathbb{S}^2$ és suficient veure que $\mathbb{S}^2 \sim_{\text{SO}_3(\mathbb{R})} \mathbb{S}^2 \setminus D$. I això no és gaire difícil de demostrar utilitzant que D és numerable:

Teorema 1.3.1. *Si $D \subseteq \mathbb{S}^2$ és numerable, aleshores $\mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{\text{SO}_3(\mathbb{R})} \mathbb{S}^2$.*

Demostració. Com que D és numerable, podem triar una recta ℓ per l'origen que no passi per cap punt de D . Triem una rotació $\rho \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ d'eix ℓ de forma que $\{\rho^i(D)\}_{i \geq 1}$ siguin disjunts. Podem trobar-ne alguna perquè hi ha una quantitat no numerable de possibles angles de rotació, mentre que, com que D és numerable, la restricció anterior només en descarta una quantitat com a molt numerable.

Ara, considerem els subconjunts $D^* = \bigcup_{i \geq 0} \rho^i(D)$ i $\mathbb{S}^2 \setminus D^*$. Tenim que

$$\mathbb{S}^2 = D^* \sqcup (\mathbb{S}^2 \setminus D^*).$$

Si apliquem ρ a D^* fem que “absorbeixi” D , és a dir, $\rho(D^*) = D^* \setminus D$; si, d'altra banda, no movem $\mathbb{S}^2 \setminus D^*$, obtenim que

$$\mathbb{S}^2 \setminus D = (D^* \setminus D) \sqcup (\mathbb{S}^2 \setminus D^*) = \rho(D^*) \sqcup \mathbb{S}^2 \setminus D^*$$

de forma que $\mathbb{S}^2 \sim_{\text{SO}_3(\mathbb{R})} \mathbb{S}^2 \setminus D$. $\square$

D'aquí deduïm immediatament la paradoxa de Banach-Tarski:

Corol·lari 1.3.1 (Paradoxa de Banach-Tarski per a l'esfera). *L'esfera $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.*

Demostració. Pel Teorema 1.2.2, existeix un subconjunt numerable $D \subseteq \mathbb{S}^2$ de forma que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R}^3)$ -paradoxal. D'altra banda, pel Teorema 1.3.1, $\mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{\text{SO}_3(\mathbb{R})} \mathbb{S}^2$. Per tant, el Teorema 1.3.2 ens permet concloure que $\mathbb{S}^2$ també és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal. $\square$

Vegem finalment que tota la bola $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ (i qualsevol bola de qualsevol radi, realment, amb el mateix argument) és $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.

Corol·lari 1.3.2 (Paradoxa de Banach-Tarski per a la bola). *La bola $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ (de fet, qualsevol bola de $\mathbb{R}^3$) és $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.*

Demostració. La demostració és la mateixa per a qualsevol bola de $\mathbb{R}^3$; donem, per simplicitat, la demostració per a la bola unitat $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Podem traslladar la paradoxa de Banach-Tarski en l'esfera a una paradoxa per a $\mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ identificant cada punt $p \in \mathbb{S}^2$ amb el segment semiobert $r_p = \{tp \mid 0 < t \leq 1\} \subseteq \mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$: les rotacions que li apliquem al punt p per a duplicar $\mathbb{S}^2$ se les apliquem a tots els punts de r_p alhora; això ens permet duplicar $\mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Per tant, $\mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ és $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal i, per tant, $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.

Per a concloure el que volem basta veure que $\mathbb{D}^3$ i $\mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ són $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -equidescomponibles. Per a fer-ho utilitzem un argument d'*absorció* molt similar al de la demostració del Teorema 1.3.1. Aquí ens cal utilitzar una rotació que no fixi l'origen; per això hem de canviar el grup $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ per tot el grup d'isometries $\text{SE}_3(\mathbb{R})$. Concretament, prenem ℓ la recta paral·lela a l'eix y que passa pel punt $(0,0,1/2)$ i prenem ρ una rotació d'eix ℓ de forma que $\rho^i(0,0,0) \neq (0,0,0)$ per a tot $i \geq 1$, per exemple triant l'angle de rotació com un múltiple irracional de π .

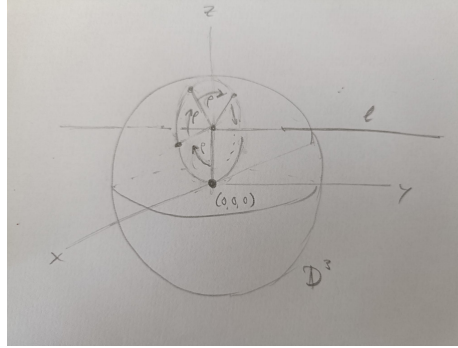


Figura 1.3: Construcció de la rotació ρ .

Ara, prenem $A = \bigcup_{i \geq 0} \rho^i(0,0,0)$, que està contingut en $\mathbb{D}^3$ per com hem triat l'eix de rotació ℓ . Tenim que $\mathbb{D}^3 = A \sqcup (\mathbb{D}^3 \setminus A)$ i, si apliquem la rotació ρ a A , fem que “absorbeixi” el punt $(0,0,0)$, és a dir, $\rho(A) = A \setminus \{(0,0,0)\}$. Per tant,

$$\mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\} = (A \setminus \{(0,0,0)\}) \sqcup (\mathbb{D}^3 \setminus A) = \rho(A) \sqcup (\mathbb{D}^3 \setminus A),$$

de forma que $\mathbb{D}^3 \sim_{\text{SE}_3(\mathbb{R})} \mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ i, com que $\mathbb{D}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ era $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -paradoxal, concloem que $\mathbb{D}^3$ també ho és. $\square$

1.4 El teorema de Banach-Schröder-Bernstein

L'objectiu de les últimes dues seccions del capítol és demostrar una generalització de la paradoxa de Banach-Tarski. Resulta que no només les boles tridimensionals són $SE_3(\mathbb{R})$ -paradoxals, sinó que qualsevol subconjunt de $\mathbb{R}^3$ fitat i d'interior no buit ho és.

La demostració consisteix en veure que qualssevol dos tals subconjunts són $SE_3(\mathbb{R})$ -equidescomponibles i aplicar el Lema 1.3.2 (les boles tridimensionals són finites i d'interior no buit i ja sabem que són paradoxals). El resultat clau que necessitem és el teorema de Banach-Schröder-Bernstein, que demostrem en aquesta secció.

Abans d'enunciar el teorema introduïm una mica de terminologia. Sempre que tenim una relació d'equivalència en la família de subconjunts d'un conjunt, podem definir una altra relació, $\preceq$, posant que $A \preceq B$ si A és equivalent amb un subconjunt de B . És senzill demostrar en general que $\preceq$ sempre és reflexiva i transitiva, sigui quina sigui la relació d'equivalència de partida. En el cas de la relació d'equidescomponibilitat, el teorema següent, de Banach-Schröder-Bernstein, afirma que és també antisimètrica mòdul equidescomponibilitat. És a dir, que $\preceq$ és un ordre en el conjunt de classes d'equidescomponibilitat de $\mathcal{P}(X)$.

Teorema 1.4.1 (de Banach-Schröder-Bernstein). *Segui G un grup que actua en un conjunt X . Donats $A, B \subseteq X$, si $A \preceq B$ i $B \preceq A$, aleshores $A \sim_G B$.*

Demostració. La idea de la demostració es pot entendre mirant la Figura 1.4. Per hipòtesi, A i B són equidescomponibles amb subconjunts $B_1 \subseteq B$ i $A_1 \subseteq A$, respectivament; és a dir, $A \sim_G B_1 \subseteq B$ i $B \sim_G A_1 \subseteq A$. Construïm una bijecció $f: A \rightarrow B_1$ que envia cada punt de A al punt de B_1 al qual va a parar per l'equidescomposició $A \sim_G B_1$. De manera anàloga construïm una altra bijecció $g: B \rightarrow A_1$ a partir de l'equidescomposició $B \sim_G A_1$.

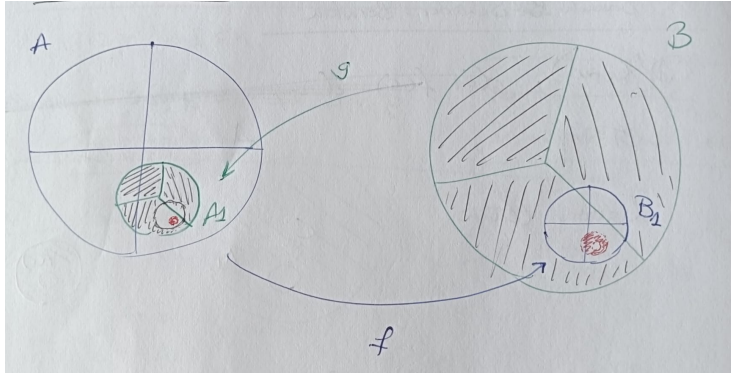


Figura 1.4: Idea de la demostració.

Volem donar una equidescomposició de A amb tot B , no només amb B_1 . La idea és intentar aprofitar l'equidescomposició $A \sim_G B_1$ tant com puguem. Amb

l'equidescomposició $A \sim_G B_1$ (és a dir, enviant cada punt a la seva imatge per f) ja obtenim tots els punts de $B_1 \subseteq B$; ens cal una forma de recuperar també els punts de $B \setminus B_1$ (en negre a la Figura 1.4).

La idea clau és que, com que $B \sim_G A_1 \subseteq A$, podem prendre un subconjunt de A_1 (en negre a la Figura 1.4) i equidescomposar-lo amb la part $B \setminus B_1$ imitant l'equidescomposició $A_1 \sim_G B$ (és a dir, enviant cada punt a la seva imatge per g^{-1}).

D'aquesta forma ja obtenim la part de B que ens faltava per omplir. Però ens trobem amb un problema: si els punts en negre de A_1 els portem als punts en negre de B , hi ha un tros de B_1 , en vermell en la Figura 1.4 que ja no obtenim (és el subconjunt de B_1 on anaven a parar per f els punts en negre de A_1). Però podem solucionar el problema de la mateixa forma que hem fet abans amb els punts de color negre de B : hi ha un subconjunt de A_1 (en vermell al dibuix) que va a parar a la part vermella de B per g^{-1} ; per tant, aquests punts, en lloc de moure'ls amb f , els mourem amb g^{-1} . Això provocarà que hi hagi un nou subconjunt de B que no obtinguem, però podem solucionar-ho anàlogament, i així successivament. Si portem aquest procés al límit trobarem l'equidescomposició desitjada.

Per a fer-ho formalment, anem a construir el subconjunt de $C \subseteq A$ que enviarem a B segons l'equidescomposició f . Després veurem que si enviem la resta de A , és a dir, $A \setminus C$, seguint l'equidescomposició g^{-1} , obtenim tota la resta del conjunt B , és a dir, que $g^{-1}(A \setminus C) = B \setminus f(C)$.

El subconjunt $C \subseteq A$ que volem descriure és el que en la Figura 1.4 no està pintat ni de negre ni de vermell (ni de cap dels següents colors amb què pintéssim els punts de A que enviariem a B utilitzant g^{-1} i no f). Un primer tros del conjunt és directament $C_0 := A \setminus A_1$, la “corona” que “envolta” els punts en negre de A_1 . El següent tros del conjunt és la “corona” dins de A_1 que “envolta” els punts de color vermell. Per construcció, aquesta corona és exactament $C_1 := gf(A \setminus A_1) = gf(C_0)$. A partir d'aquest moment, la construcció intuïtiva de dalt es repetia inductivament, així que definim

$$C_n := gf(C_{n-1}) = (gf)^n(C_0),$$

$$C := \bigcup_{n \geq 0} C_n.$$

Un cop definit aquest C , per a acabar la demostració basta veure que $g^{-1}(A \setminus C) = B \setminus f(C)$. En efecte, d'una banda equidescomposarem $C \subseteq A$ amb $f(C) \subseteq B_1 \subseteq B$ seguint l'equidescomposició $A \sim_G B_1 \subseteq B$ i, d'altra, equidescomposarem $A \setminus C \subseteq A_1$ amb $B \setminus f(C)$ seguint l'equidescomposició $A_1 \sim_G B$, donant lloc, en conjunt, a una equidescomposició de A amb B . Veure que $g^{-1}(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ és un problema elemental de teoria de conjunts que deixem com a exercici per al lector. $\square$

Una primera conseqüència del teorema de Banach-Schröder-Bernstein és que ens permet simplificar la tasca de comprovar l'equidescomponibilitat entre dos conjunts. En efecte, per a veure que $A \sim_G B$ basta comprovar dues “desigualtats”: $A \preceq B$ i $B \preceq A$. Aquesta estratègia és especialment útil quan una de les

dues desigualtats resulta ser trivial, per exemple, quan A és un subconjunt de B .

Recordem que dèiem un conjunt X era G -paradoxal si existien dos subconjunts disjunts A i B , cadascun d'ells G -equidescomponible amb X . Aquests dos subconjunts no havien de recobrir necessàriament tot X : podria ser que ens “sobressin peces” que no intervinguessin en el procés de desdoblar X en dues còpies d'ell mateix. Per exemple, en l'Exemple 1.1.1 vam veure que F_2 era F_2 -paradoxal, però de la manera que ho vam fer cap de les peces utilitzades contenia l'element $e \in F_2$. Per tant, realment començàvem amb una còpia de F_2 i la transformàvem no només en dues còpies de F_2 , sinó que també ens sobrava una còpia més de l'element e que no havíem utilitzat.

Una de les aplicacions més immediates del teorema de Banach-Schröder-Bernstein ens diu que si un conjunt X és G -paradoxal, aleshores existeix una paradoxa en què les peces utilitzades recobreixen tot X i, per tant, en què realment desdoblem X en dues còpies d'ell mateix, sense que ens sobrin més peces:

Corol·lari 1.4.1. *Un conjunt X és G -paradoxal si i només si existeixen dos subconjunts disjunts $A, B \subseteq X$ que recobreixen X de forma que $A \sim_G X \sim_G B$.*

Demostració. Basta veure que, donats $A, B \subseteq X$ disjunts (però no necessàriament recobrint X) tals que $A \sim_G X \sim_G B$, es té que $X \setminus A \sim_G X$ (aleshores A i $X \setminus A$ són els dos subconjunts desitjats). És clar que $X \setminus A \preceq X$, així que, pel teorema de Banach-Schröder-Bernstein, basta veure que $X \preceq X \setminus A$, però això ho tenim immediatament per hipòtesi: $X \sim_G B \subseteq X \setminus A$. $\square$

Observació 1.4.1. A més, la demostració del teorema de Banach-Schröder-Bernstein és constructiva. És a dir, donades les dues equidescomposicions $X \setminus A \preceq X$ i $X \preceq X \setminus A$, ens diu explícitament com hem de triar les peces per a obtenir l'equidescomposició $X \sim_G X \setminus A$.

Per tant, coneguda una paradoxa per a un conjunt en què les peces utilitzades no necessàriament recobreixen tot el conjunt, seguint la demostració del teorema de Banach-Schröder-Bernstein podem veure com les hem de canviar per a obtenir una nova paradoxa en què les peces sí que recobreixin tot el conjunt. Si fem això amb la paradoxa de F_2 de l'Exemple 1.1.1 obtenim la següent nova paradoxa de F_2 , que ara sí que conté tots els elements de F_2 en les peces utilitzades:

$$\begin{aligned} A_1 &:= W(\sigma), \\ A_2 &:= W(\sigma^{-1}), \\ B_1 &:= W(\tau) \cup \{\tau^{-k}\}_{k \geq 0} = W(\tau) \cup \{e, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \dots\}, \\ B_2 &:= W(\tau^{-1}) \setminus \{\tau^{-k}\}_{k \geq 0} = W(\tau^{-1}) \cup \{e, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \dots\}, \\ X &= A_1 \sqcup \sigma A_2 = B_1 \sqcup \tau B_2. \end{aligned}$$

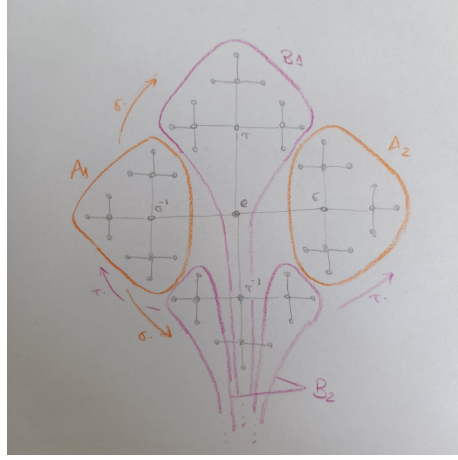


Figura 1.5: Nova paradoxa per a F_2 , en què les peces recobreixen tot F_2 .

1.5 Versió forta de la paradoxa de Banach-Tarski

Vegem ara com deduir del teorema de Banach-Schröder-Bernstein la versió forta de la paradoxa de Banach-Tarski que comentàvem al començament de la secció anterior.

Teorema 1.5.1 (Versió forta de la paradoxa de Banach-Tarski). *Si $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$ són fitats i d'interior no buit, aleshores X i Y són $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -equidescomponibles.*

Demostració. Pel teorema de Banach-Schröder-Bernstein (i per simetria) basta demostrar que $X \preceq Y$.

Prenem una bola B_X suficientment gran perquè $X \subseteq B_X$ i una bola suficientment petita perquè $B_Y \subseteq Y$ (podem perquè X i Y són fitats i d'interior no buit, respectivament).

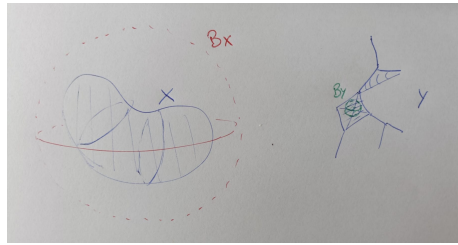


Figura 1.6: Les boles B_X i B_Y .

Si prenem $N \gg 1$ podem recobrir B_X per N còpies (no disjunes) de B_Y . Per tant, si S és un conjunt format per N còpies disjunes de B_Y , aleshores podem equidescomposar X amb un subconjunt de S (veure la Figura 1.7). Una

manera de visualitzar aquesta equidescomposició és identificar cadascuna de les boles que recobreixen X amb una de les que formen S . Aleshores, anem agafant cadascuna de les boles que formen el recobriment, una rere l'altra, i les traslladem a la corresponent bola de S , portant dins seu tota la part de X que hi estigui continguda i que no haguem portat cap a S prèviament dins d'una altra bola.

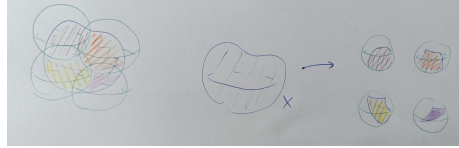


Figura 1.7: Equidescomposició de X amb un subconjunt de S .

Per tant, tenim que $X \preceq S$. Però S és la unió disjunta de N còpies de la bola B_Y . Per tant, aplicant la paradoxa de Banach-Tarski N vegades, tenim que $B_Y \sim_{SE_3(\mathbb{R})} S$; en particular, $S \preceq B_Y$. Per tant, obtenim que

$$X \preceq S \preceq B_Y \preceq Y$$

de forma que $X \preceq Y$, com volíem. $\square$

Com ja hem comentat a dalt, el teorema implica immediatament el corol·lari següent:

Corol·lari 1.5.1. *Qualsevol subconjunt fitat i d'interior no buit de $\mathbb{R}^3$ és $SE_3(\mathbb{R})$ -paradoxal.* $\square$

Una pregunta que sorgeix de forma natural després de veure el Teorema 1.5.1 és la següent: quins subconjunts de $\mathbb{R}^3$ *no* són $SE_3(\mathbb{R})$ -equidescomponibles? Concretament, ens podem plantejar el recíproc del teorema: pot ser que un subconjunt fitat i d'interior no buit de $\mathbb{R}^3$ sigui $SE_3(\mathbb{R})$ -equidescomponible amb un subconjunt que no sigui fitat o que tingui interior buit? La resposta és diferent en cada cas. En primer lloc, subconjunts fitats només poden ser $SE_3(\mathbb{R})$ -equidescomponibles amb subconjunts fitats:

Proposició 1.5.1. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^3$ és fitat i $A \sim_{SE_3(\mathbb{R})} B$ per a un cert subconjunt $B \subseteq \mathbb{R}^3$, aleshores B també és fitat.*

Demostració. Com que A és fitat, les peces $A_1, \dots, A_n$ en què el partim per a equidescomposar-lo amb B també ho són. Ara, com que $SE_3(\mathbb{R})$ és el grup d'isometries de $\mathbb{R}^3$, la imatge d'un subconjunt fitat per qualsevol element de $SE_3(\mathbb{R})$ continua essent fitada. En particular, les peces $g_1 A_1, \dots, g_n A_n$ en què transformem $A_1, \dots, A_n$ per a obtenir B són totes elles fitades. Per tant, $B = \bigsqcup_{i=1}^n g_i A_i$ és una unió finita de subconjunts fitats, d'on també és fitat. $\square$

En canvi, sí que hi ha subconjunts d'interior buit que són $SE_3(\mathbb{R})$ -equidescomponibles amb subconjunts d'interior no buit:

Exemple 1.5.1. La bola unitat $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ és $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ -equidescomponible amb ella mateixa menys els seus punts racionals, $\mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$. En efecte, podem utilitzar exactament la mateixa demostració que al Teorema 1.3.1 per a absorbir tots els punts racionals de $\mathbb{D}^3$ (n'hi ha una quantitat numerable). Clarament l'interior de $\mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ és buit i el de $\mathbb{D}^3$ no ho és.

Capítol 2

La dicotomia de Tarski

L'objectiu d'aquest segon capítol és anar més enllà de la paradoxa de Banach-Tarski i estudiar un resultat demostrat per Tarski el 1938, que mostra que hi ha una dicotomia entre la paradoxalitat i la mesurabilitat: un conjunt o bé és paradoxal o bé admet una mesura finitament additiva.

La maquinària principal que cal desenvolupar per a demostrar la dicotomia de Tarski és el semigrup de tipus d'equidescomponibilitat. A grans trets, el que farem és construir un objecte algebraic (el semigrup de tipus d'equidescomponibilitat) que ens permetrà “sumar conjunts”, de forma, per exemple, que un conjunt paradoxal correspondrà a un element X del semigrup satisfent que $X = 2X$. D'aquesta manera, podrem treballar algebraicament amb el concepte de paradoxalitat, i serà això el que ens permetrà finalment demostrar la dicotomia de Tarski.

2.1 Semigrup de tipus d'equidescomponibilitat

Definició 2.1.1. Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X . Definim una acció ampliada com segueix. Considerem $X^* := X \times \mathbb{N}$ i $G^* := G \times \text{Sym}(\mathbb{N})$. El grup G^* actua sobre X^* de forma natural: $(g, \pi)(x, n) := (gx, \pi(n))$.

Pensem en X^* com un conjunt de còpies de X , una en cada nivell $n \in \mathbb{N}$. Això ens permet treballar amb múltiples peces de X , que potser se solaparien, actuant de forma diferent amb cadascuna.

Lema 2.1.1. Donats $E, F \subseteq X$, tenim que $E \sim_G F$ si i només si $E \times \{k\} \sim_{G^*} F \times \{l\}$ per a qualssevol $k, l \in \mathbb{N}$.

Demostració. ($\Leftarrow$) En efecte, els subconjunts de $E \times \{k\}$ són tots de la forma “subconjunt de E ” producte $\{k\}$ (i anàlogament per a $F \times \{l\}$), així que per hipòtesi tenim que

$$E \times \{k\} = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \times \{k\} \xrightarrow{(g_i, \pi_i)} \bigsqcup_{i=1}^n B_i \times \{l\} = F \times \{l\}.$$

En particular, mirant la primera component, obtenim que E i F són G -equidescomponibles amb els subconjunts A_i, B_i i elements g_i .

($\Rightarrow$) Per hipòtesi, tenim que

$$E = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \xrightarrow{g_i} \bigsqcup_{i=1}^n B_i = F.$$

Donats $k, l \in \mathbb{N}$ qualssevol, triem una permutació $\pi \in \text{Sym}(\mathbb{N})$ enviant k a l i tenim que els subconjunts $A_i \times \{k\}$, $B_i \times \{l\}$ i els elements (g_i, π) , mostren que $E \times \{k\}$ i $F \times \{l\}$ són G^* -equidescomponibles. $\square$

Observació 2.1.1. $E \subseteq X$ és G -paradoxal si i només si $E \times \{0\} \sim_{G^*} E \times \{0, 1\}$. La suficiència és clara: oblidant-nos dels nivells obtenim una paradoxa per a E . Per a la necessitat basta reproduir la paradoxa de E enviant les peces que donaran lloc a la primera còpia de E al nivell 0, i les que donaran lloc a la segona, al nivell 1.

Definició 2.1.2. Anomenem un conjunt $A \subseteq X^*$ *fitat* si només té un nombre finit de nivells, és a dir, si $\#\pi_2(A) < \infty$, on $\pi_2: X^* = X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ és la projecció en la segona component.

Definició 2.1.3. Sigui $S(G, X)$ la família de totes les classes de G^* -equidescomponibilitat de subconjunts fitats de X^* . Donat $A \subseteq X^*$, anomenem aquesta classe el *tipus* de A , i el denotem per $[A]$. Donats dos tipus $[A], [B] \in S(G, X)$, definim

$$[A] + [B] := [A \cup B'],$$

on B' és un shift de B suficientment gran perquè no tingui nivells en comú amb A , és a dir, $B' = B + k := \{(b, m + k) \mid (b, m) \in B\}$, on $k \gg 1$ per tal que $\pi_2(B') \cap \pi_2(A) = \emptyset$. (Intuïtivament, $[A] + [B]$ és el tipus de la unió disjunta de A i B .)

Proposició 2.1.1. *L'operació $+$ està ben definida i fa de $S(G, X)$ un semigrup commutatiu. L'anomenem el semigrup de tipus (d'equidescomponibilitat).*

Demostració. Dividim la demostració en una sèrie de passos:

(i) **Ben definida respecte del shift:** Suposem que B' i B'' són shifts de B per k i l . Basta construir una permutació de $\mathbb{N}$ que sigui una bijecció entre els nivells de B' i els de B'' i deixi fixos els de A . Podem construir-la enviant els nivells de B' als nivells de B'' fent un shift $+(l - k)$, els nivells de B'' que no siguin de B' enviar-los als nivells de B' que no són de B'' per ordre (ho podem fer perquè n'hi ha el mateix nombre: B' i B'' tenen el mateix nombre de nivells) i deixant la resta de nivells fixos.

(ii) **Ben definida respecte de la classe de A :** Suposem que $A \sim_{G^*} \tilde{A}$ i vegem que $A \cup B' \sim_{G^*} \tilde{A} \cup B'$. Podem suposar que el shift fet a B és el mateix en els dos casos (i, per tant, que B' és disjunt tant de A com de $\tilde{A}$) perquè hem demostrat a (i) que el shift no canvia el tipus d'equidescomponibilitat. Per a

concloure que $A \cup B' \sim_{G^*} \tilde{A} \cup B'$ basta replicar la descomposició de A en $\tilde{A}$ en els seus nivells i no tocar la resta.

(iii) Ben definida respecte de la classe de B : Clarament si B i $\tilde{B}$ són equidescomponibles, els seus shifts $B', \tilde{B}'$ també ho són (basta fer la mateixa transformació però composta amb el shift). El mateix argument de (ii) mostra ara que si B' i $\tilde{B}'$ són equidescomponibles, també ho són $A \cup B'$ i $A \cup \tilde{B}'$.

(iv) Associativitat: Tenim que $([A] + [B]) + [C] = [(A \cup (B+k)) \cup (C+l)]$, on els tres conjunts finals són disjunts. D'altra banda, $[A] + ([B] + [C]) = [A \cup (B+p) \cup (C+q+p)]$, on els tres conjunts finals tornen a ser disjunts. Podem muntar una bijecció de $\mathbb{N}$ de forma que els nivells de cada conjunt vagin on toca; veure la Figura 2.1.

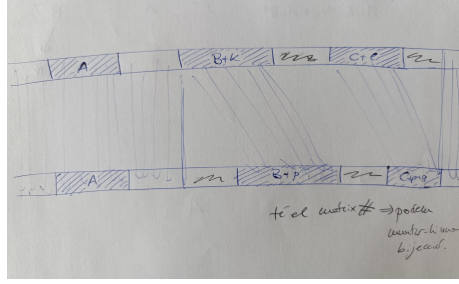


Figura 2.1: La bijecció per a l'associativitat.

(v) Commutativitat: Hem de veure que $A \cup B' \sim_{G^*} B \cup A'$. Per a fer-ho basta trobar una permutació de $\mathbb{N}$ que envii els nivells de A als nivells de A' i els nivells de B als nivells de B' . Això ho podem fer perquè el nombre de nivells d'un conjunt és el mateix que el del seu shift i perquè A i B' (ni B i A') tenen nivells en comú. $\square$

Observació 2.1.2. $S(G, X)$ és, de fet, un monoide, amb element neutre $[\emptyset]$.

2.2 Alguns exemples de semigrups de tipus

Exemple 2.2.1. Considerem l'acció del grup diedral D_3 sobre els tres vèrtexs d'un triangle, que denotem per $\cdot := \{u, v, w\}$. Anem a calcular $S(D_3, \cdot)$.

Cada subconjunt fitat $A \subseteq \cdot \times \mathbb{N}$ està format per un cert nombre p de còpies de u , un cert nombre q de còpies de v i un cert nombre r de còpies de w , on amb una còpia de u (per exemple) ens referim a un element $(u, i) \in \cdot \times \mathbb{N}$. Per tant, podem posar

$$A = (\{u\} \times \{i_1, \dots, i_p\}) \sqcup (\{v\} \times \{j_1, \dots, j_q\}) \sqcup (\{w\} \times \{k_1, \dots, k_r\})$$

Anomenem A_u, A_v, A_w als tres conjunts de la partició, respectivament. Com que D_3 actua transitivament en $\cdot$, podem trobar elements $(g_v, \pi_v), (g_w, \pi_w) \in G^* = G \times \text{Sym}(\mathbb{N})$ que enviïn, respectivament, A_v a un conjunt de la forma

$\{u\} \times \{j'_1, \dots, j'_q\}$ i A_w a un conjunt de la forma $\{u\} \times \{k'_1, \dots, k'_r\}$ de tal manera que els nivells $i_1, \dots, i_p, j'_1, \dots, j'_q, k'_1, \dots, k'_r$ siguin disjunts.

Deduïm doncs que A és equidescomponible amb un conjunt format per $p + q + r$ còpies de u . Reordenant adequadament els nivells, podem concloure que A és equidescomponible amb $\{u\} \times \{1, \dots, p + q + r\}$. De fet, $p + q + r = \#A$, així que hem vist que tot subconjunt $A \subseteq \cdot \times \mathbb{N}$ és equidescomponible amb $\{u\} \times \{1, \dots, \#A\}$.

Dit d'una altra manera, hem demostrat que l'aplicació

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{N} &\rightarrow S(D_3, \cdot) \\ n &\mapsto [\{u\} \times \{1, \dots, n\}] \end{aligned}$$

és exhaustiva. Anem a veure que, de fet, és un isomorfisme de semigrups, de forma que $S(D_3, \cdot) \cong \mathbb{N}$, on identifiquem el tipus d'un conjunt amb el seu nombre de punts (on comptem per separat totes les còpies que hi hagi de cada vèrtex).

Comencem veient que és un morfisme de semigrups. Hem de veure que $\Psi(n + m) = \Psi(n) + \Psi(m)$, és a dir, que

$$[\{u\} \times \{1, \dots, n + m\}] = [\{u\} \times \{1, \dots, n\}] + [\{u\} \times \{1, \dots, m\}].$$

Això és immediat de la definició de l'operació del semigrup tipus.

Finalment, vegem que és injectiva. Hem de comprovar, per tant, que, si $[\{u\} \times \{1, \dots, n\}] = [\{u\} \times \{1, \dots, m\}]$, cal necessàriament que $n = m$.

Això és conseqüència d'un resultat més general:

Teorema 2.2.1. *Sigui G un grup que actua sobre un conjunt X . El cardinal és un invariant per G -equidescomponibilitat.* $\square$

Demostració. En efecte, suposem que $A \sim_G B$ per a dos subconjunts $A, B \subseteq X$ i vegem que $\#A = \#B$. Per hipòtesi, tenim que

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \xrightarrow{g_i} \bigsqcup_{i=1}^n B_i = B$$

Com que $B_i = g_i A_i$ i els elements g_i actuen en X com bijeccions, tenim que $\#A_i = \#g_i A_i = \#B_i$. Per tant,

$$\#A = \# \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \#A_i = \sum_{i=1}^n \#B_i = \# \bigsqcup_{i=1}^n B_i = \#B,$$

com volíem demostrar. $\square$

Aquest resultat ens permet concloure que $S(D_3, \cdot) \cong \mathbb{N}$.

L'argument utilitzat a dalt funciona exactament igual sempre que X sigui un conjunt finit i G hi actuï transitivament. És a dir,

Teorema 2.2.2. *Segui X un conjunt finit i G un grup que actua transitivament en X . Aleshores, $S(G, X) \cong \mathbb{N}$.* $\square$

És necessari suposar que X sigui finit perquè l'argument de dalt sigui correcte. En efecte, per a equidescomposar A amb $\{x\} \times \{1, \dots, \#A\}$ (on x és qualsevol punt de X), utilitzem $\# \pi_1(A)$ peces, on $\pi_1: X \times \mathbb{N} \rightarrow X$ és la projecció en la primera component. Si X no és finit, per a alguns subconjunts $A \subseteq X^*$ estariem utilitzant infinites peces, però la definició d'equidescomponibilitat només ens permet utilitzar-ne un nombre finit.

2.3 Definició de $S(G, X)$ per propietat universal

En aquesta secció fem un parèntesi per a donar una definició alternativa, per propietat universal, del semigrup $S(G, X)$:

Definició 2.3.1. Segui G un grup que actua sobre un conjunt X . Definim $\mathcal{S}$ com el semigrup (monoide) commutatiu generat per símbols $[E]$ per a cada $E \subseteq X$, subjecte a les relacions següents:

1. $[\emptyset] = 0$, l'element neutre del monoide,
2. $[E \cup F] = [E] + [F]$ si $E \cap F = \emptyset$,
3. $[gE] = [E]$ per a tot $E \subseteq X$ i $g \in G$.

Vegem que $\mathcal{S}$ és isomorf a $S(G, X)$:

Proposició 2.3.1. *Segui G un grup que actua sobre un conjunt X . Aleshores, $\mathcal{S}$ i $S(G, X)$ són isomorfs via l'isomorfisme $\Psi: \mathcal{S} \rightarrow S(G, X)$ que envia cada generador $[E] \in \mathcal{S}$ a $[E \times \{0\}] \in S(G, X)$.*

Demostració. Comencem veient que està ben definida i que és un morfisme de semigrups: hem de veure que les tres relacions de $\mathcal{S}$ es continuen satisfent en $S(G, X)$.

1. **Vegem que $\Psi([\emptyset]) = 0_{S(G, X)}$.** En efecte,

$$\Psi([\emptyset]) = [\emptyset \times \{0\}] = [\emptyset] = 0_{S(G, X)}.$$

2. **Vegem que $\Psi([E \cup F]) = \Psi(E) + \Psi(F)$ si $E \cap F = \emptyset$.** En efecte, tenim que

$$\begin{aligned} \Psi([E \cup F]) &= [(E \cup F) \times \{0\}] \\ \Psi(E) + \Psi(F) &= [E \times \{0\}] + [F \times \{0\}] = [E \times \{0\} \cup F \times \{0\}] \end{aligned}$$

i tenim que $[(E \cup F) \times \{0\}] = [E \times \{0\} \cup F \times \{0\}]$ perquè E i F són disjunts (podem prendre la peça $F \times \{0\}$ del primer conjunt i enviar-la al nivell 1 per una bijecció $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que envii $0 \mapsto 1$ i obtenim el segon conjunt).

3. **Vegem que $\Psi([E]) = \Psi([gE])$ per a qualssevol $E \subseteq X, g \in G$.** En efecte, és el mateix veure que $[E \times \{0\}] = [(gE) \times \{0\}]$, però això és immediat per la definició del semigrup de tipus.

Falta veure que Ψ és injectiva i exhaustiva. Que és exhaustiva és clar: donat un $[A] \in S(G, X)$, posem $A \subseteq X \times \mathbb{N}$ com $A = A_1 \times \{n_1\} \cup \dots \cup A_k \times \{n_k\}$, on $n_1, \dots, n_k$ són diferents i $A_1, \dots, A_k$ són no buits (posem A com a unió dels seus nivells). Aleshores,

$$\begin{aligned} [A] &= [A_1 \times \{n_1\} \cup \dots \cup A_k \times \{n_k\}] = [A_1 \times \{n_1\}] + \dots + [A_k \times \{n_k\}] \\ &= [A_1 \times \{0\}] + \dots + [A_k \times \{0\}] \\ &= \Psi([A_1]) + \dots + \Psi([A_k]) \\ &= \Psi([A_1] + \dots + [A_k]). \end{aligned}$$

Vegem finalment que Ψ és injectiva. Suposem doncs que $\Psi(\sum_{i=1}^n [A_i]) = \Psi(\sum_{j=1}^m [B_j])$ (on pot haver repeticions entre els A_i i entre els B_j) i vegem que $[\sum_{i=1}^n A_i] = [\sum_{j=1}^m B_j]$. Tenim que

$$\begin{aligned} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \times \{i\} \right] &= \sum_{i=1}^n [A_i \times \{0\}] = \Psi \left(\sum_{i=1}^n [A_i] \right) = \\ &= \Psi \left(\sum_{j=1}^m [B_j] \right) = \sum_{j=1}^m [B_j \times \{0\}] = \left[\bigcup_{j=1}^m B_j \times \{j\} \right] \end{aligned}$$

Posem $A := \bigcup_{i=1}^n A_i \times \{i\}, B := \bigcup_{j=1}^m B_j \times \{j\}$. Aleshores, la igualtat de dalt significa que existeixen subconjunts $W_1, \dots, W_l \subseteq A$ i elements $g_1, \dots, g_l \in G$ tals que

$$A = \bigsqcup_{k=1}^l W_k \times \{n_k\}, \quad B = \bigsqcup_{k=1}^l (g_k W_k) \times \{m_k\},$$

on estem suposant que fem les parts prou petites perquè cadascuna d'elles estigui continguda en un sol nivell; per tant, podem escriure cadascuna d'elles com $W_k \times \{n_k\}$, on $W_{n_k} \subseteq A_{n_k}$ i l'element de G^* que la mou el podem escriure com $(g_k, n_k \mapsto m_k)$, on $g_k \in G$ i $n_k \mapsto m_k$ és una bijecció qualsevol de $\mathbb{N}$ que envii n_k a m_k .

Per tant, podem descomposar cada A_i en trossos disjunts (els W_k continguts en A_i ; posem que són $W_i, i \in L_i \subseteq [l]$) i cada B_j en trossos disjunts (els $g_k W_k$ continguts en B_j ; posem que són $g_j W_j, j \in L_j \subseteq [l]$). Per tant, la relació 2 de $\mathcal{S}$ ens diu que $[A_i] = \sum_{k \in L_i} [W_k]$ i que $B_j = \sum_{k \in L_j} [g_k W_k]$. Però la relació 3 de $\mathcal{S}$ ens diu que $[W_k] = [g_k W_k]$. Per tant, considerant totes les peces perquè puguem aparellar cada W_k amb el corresponent $g_k W_k$ obtenim

$$\sum_{i=1}^n [A_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{k \in L_i} [W_k] = \sum_{k=1}^l [W_k] = \sum_{k=1}^l [g_k W_k] = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in L_j} [g_k W_k] = \sum_{j=1}^m [B_j]$$

que és el que volíem veure. $\square$

2.4 Propietats de $S(G, X)$

Per a demostrar l'alternativa de Tarski ens calen dues propietats algebraiques de $S(G, X)$. La primera té a veure amb un preordre que hi podem considerar, i la segona és una llei de cancel·lació (una llei de cancel·lació tan forta com en la teoria de grups no la tindrem, perquè la paradoxa de Banach-Tarski es pot reescriure com $[\mathbb{S}^1 \times \{0\}] = [\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\}] = [\mathbb{S}^1 \times \{0\}] + [\mathbb{S}^1 \times \{0\}]$, però clarament $[\mathbb{S}^1 \times \{0\}] \neq [\emptyset]$).

Definició 2.4.1. Donat un monoide S qualsevol, podem definir-hi un preordre, que anomenem *preordre algebraic*: donats $a, b \in S$, diem que $a \leq b$ si existeix $c \in S$ tal que $b = a + c$.

Observació 2.4.1. En general, el preordre és transitiu (per associativitat) i reflexiu (en monoides, perquè existeix un element neutre), però no és necessàriament un ordre, perquè pot no ser antisimètric. Anem a veure que en el cas concret de $S(G, X)$ sí que ho és, gràcies al teorema de Banach-Schröder-Bernstein (formalment, el que volem demostrar, $[A] \leq [B], [B] \leq [A] \Rightarrow [A] = [B]$, ja s'assembla molt a l'enunciat del teorema).

Lema 2.4.1. *Donats dos tipus $[A], [B] \in S(G, X)$, se satisfà que $[A] \leq [B] \iff A \preceq B$ (recordem que això últim significava que $A \sim_{G^*} D$ per a algun subconjunt $D \subseteq B$).*

Demostració. ($\Leftarrow$) Per hipòtesi, $[A] = [D]$, on $D \subseteq B$. Però és clar que $[B] = [D] + [B \setminus D] = [A] + [B \setminus D]$, de forma que $[A] \leq [B]$.

($\Rightarrow$) Per hipòtesi, $[B] = [A] + [C] = [A \cup C']$. És a dir, partint la unió disjunta de A i C en peces i movent-les amb G^* , obtenim B . Si mirem on va a parar A seguint aquest procés trobarem un subconjunt $D \subseteq B$ de forma que $A \sim_{G^*} D$, que és el que volíem. $\square$

Corol·lari 2.4.1. *El preordre algebraic en $S(G, X)$ és un ordre.*

Demostració. En efecte, ja hem comentat que basta demostrar que és antisimètric. Suposem doncs que $[A] \leq [B]$ i $[B] \leq [A]$. Pel lema, això significa que $A \preceq B$ i $B \preceq A$. Pel teorema de Banach-Schröder-Bernstein (Teorema 1.4.1), concloem que $A \sim_{G^*} B$, és a dir, $[A] = [B]$. $\square$

Passem a considerar la llei de cancel·lació.

Notació 2.4.1. Donat $n \in \mathbb{N}$ i $a \in S$, escrivim $na = a + \overset{n)}{\cdots} + a$.

Volem demostrar el següent teorema, que ens diu que, encara que en general no hi hagi una llei de cancel·lació en $S(G, X)$, sí que podem cancel·lar múltiples:

Teorema 2.4.1 (Llei de cancel·lació). *Donats $[A], [B] \in S(G, X)$, i $n \in \mathbb{N}$, es té que $n[A] = n[B] \Rightarrow [A] = [B]$.*

De fet, pel teorema de Banach-Schröder-Bernstein (i el Lema 2.4.1), basta demostrar la versió feble següent:

Teorema 2.4.2 (Llei de cancel·lació, forma feble). *Donats $[A], [B] \in S(G, X)$, i $n \in \mathbb{N}$, es té que $n[A] \leq n[B] \Rightarrow [A] \leq [B]$.*

Demostració. Posem $\alpha = [A], \beta = [B]$. Per hipòtesi, existeixen dos conjunts $E = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $F = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ tals que $[A_i] = \alpha$, $[B_i] = \beta$ tals que E és G^* -equidescomponible amb un cert subconjunt $E' \subseteq F$. Podem suposar que $A_1 = A, B_1 = B$.

Sigui $\chi: E \rightarrow E' \subseteq F$ l'aplicació que envia cadascuna de les peces de E a la corresponent peça de E' per l'equidescomposició. De la mateixa manera, com que $[A_i] = [A]$ per a cada i , siguin $\varphi_i: A_i \rightarrow A$ les aplicacions construïdes anàlogament a χ (per a $i = 1$, com que $A_1 = A$, podem prendre $\varphi_1 = \text{id}_A$). Anàlogament construïm $\psi_i: B_i \rightarrow B$ ($\psi_1 = \text{id}_B$). Per a cada $a \in A$, definim $\bar{a} := \{a, \varphi_2(a), \dots, \varphi_n(a)\}$ (és a dir, és l'element $a \in A = A_1$ juntament amb els corresponents elements en els altres A_i) i, anàlogament, per a $b \in B$, definim $\bar{b} = \{b, \psi_2(b), \dots, \psi_n(b)\}$.

Construïm un graf bipartit entre $\bar{A} := \{\bar{a} \mid a \in A\}$ i $\bar{B} := \{\bar{b} \mid b \in B\}$ col·locant, per a cada $i = 1, \dots, n$, una aresta $\bar{a}\bar{b}$ si la còpia de a en A_i , és a dir, $\varphi_i(a) \in A_i$, en descomposar $E \supseteq A_i$ en $E' \subseteq F$, va a parar a alguna còpia de b en algun B_j , és a dir, a algun $\psi_j(b)$. És a dir, per a cada $i = 1, \dots, n$, construïm una aresta $\bar{a}\bar{b}$ si $\chi \circ \varphi_i(a) \in \bar{b}$.

El graf resultant pot tenir arestes múltiples (si $\chi \circ \varphi_i(a), \chi \circ \varphi_{i'}(a) \in \bar{b}$ per a dos i, i' diferents), és n -regular en $\bar{A}$ (perquè hem construït n arestes sortint de cada $\bar{a} \in \bar{A}$, una per cada $i = 1, \dots, n$), i té grau màxim n en $\bar{B}$ (cada $\bar{b} \in \bar{B}$ són n punts de F , i χ és bijectiva entre E i $E' \subseteq F$, així que no pot haver-hi més de n punts de E (i, per tant, vèrtexs $\bar{a} \in \bar{A}$) que vagin a parar a punts de $\bar{b} \subseteq F$ (no és necessàriament n -regular perquè E s'equidescomposa amb $E' \subseteq F$, no necessàriament amb tot F , així que pot haver-hi punts de $\bar{b}$ que no siguin imatge de cap punt de E per χ)).

Afirmem que el graf satisfà la condició del matrimoni de Hall: tot subconjunt de $\bar{A}$ té veïnatge com a mínim tan gran com ell. En efecte, sigui $D \subseteq \bar{A}$ amb $\#D = k$ i vegem que $\#N(D) \geq k$. Cada vèrtex de D té grau n , però podria haver-hi repeticions entre els veïns de cada vèrtex (de fet, fins i tot entre els veïns d'un mateix vèrtex), així que en general $\#N(D)$ no serà nk , però només ens cal veure que $\#N(D) \geq k$. La idea és que si $N(D)$ fos petit, els vèrtexs de $N(D)$ haurien de tenir grau molt alt, i no poden tenir-lo més gran que n , d'on trobarem la contradicció. En efecte, si $\#N(D) < k$, com que cada vèrtex de $N(D) \subseteq \bar{B}$ té grau $\leq n$, el nombre d'arestes que arriben a $N(D)$ ha de ser $< nk$, però ja en teníem nk sortint de D !!

Per tant, pel teorema de Hall, hi ha un matching M que emparella tots els vèrtexs $\bar{a} \in \bar{A}$ (de fet, el graf podria ser infinit, així que la versió habitual del teorema no ens és suficient, però la generalització a grafs infinits també és certa, demostrada per Marshall Hall, veure [4, Teorema C.2]). Per tant, per a cada $\bar{a} \in \bar{A}$ hem triat una única aresta $\bar{a}\bar{b}$, que existeix perquè hi ha alguns $i, j = 1, \dots, n$ de forma que $\chi \circ \varphi_i(a) = \psi_j(b)$.

La idea ara és veure cadascun d'aquests $\varphi_i(a), \psi_j(b)$ directament en A i B (i no en les còpies A_i, B_j) via les equidescomposicions $\varphi_i: A_i \rightarrow A, \psi_j: B_j \rightarrow B$

per a treure'n una equidescomposició de A amb un subconjunt de B . Definim doncs $C_{ij} := \{a \in A \mid \bar{a}\bar{b} \in M \text{ i } \chi \circ \varphi_i(a) = \psi_j(b)\}$ i $D_{ij} := \{b \in B \mid \bar{a}\bar{b} \in M \text{ i } \chi \circ \varphi_i(a) = \psi_j(b)\}$. Aleshores, $\psi_j^{-1} \circ \chi \circ \varphi_i$ envia C_{ij} a D_{ij} i, fent més petites les peces corresponents a φ_i, χ, ψ_j , dona lloc a una equidescomposició entre ells. Fent aquestes transformacions en cadascuna de les peces $C_{ij} \subseteq A$, trobem que A és equidescomponible amb $\bigcup D_{ij} \subseteq B$, com volíem (les peces C_{ij} recobreixen tot A perquè M aparellava tots els vèrtexs de $\bar{A}$). $\square$

2.5 La dicotomia de Tarski

Ja tenim els coneixements algebraics sobre $S(G, X)$ necessaris per a poder demostrar la dicotomia de Tarski:

Teorema 2.5.1 (Dicotomia de Tarski). *Segui G un grup que actua sobre un conjunt X . Donat $E \subseteq X$, les propietats següents són equivalents:*

- (1) *E no és paradoxal.*
- (2) *Existeix una mesura finitament additiva i G -invariant $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ (és a dir, ben definida per a tots els subconjunts de X) tal que $\mu(E) = 1$.*

La implicació (2) $\Rightarrow$ (1) és trivial: si E és paradoxal, existeixen $E_1 \sqcup E_2 \subseteq E$ tals que $E_1 \sim_G E \sim_G E_2$, d'on, per G -invariància, $\mu(E_1) = \mu(E) = \mu(E_2)$, però aleshores

$$2 = \mu(E) + \mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \sqcup E_2) = \mu(E) = 1 \quad !!$$

És per a demostrar l'altra implicació que ens caldran els resultats de la secció anterior. De fet, necessitarem encara un altre resultat, purament algebraic, demostrat per Tarski:

Teorema 2.5.2. *Segui $(S, +)$ un semigrup commutatiu i $e \in S$. Aleshores, les propietats següents són equivalents:*

- (1) *Per a tot $n \in \mathbb{N}$, es té que $(n+1)e \not\leq ne$ (on l'ordre és el preordre algebraic introduït fa dues seccions).*
- (2) *Existeix un morfisme de semigrups $\mu: S \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(e) = 1$.*

Si demostrem aquest resultat, la dicotomia de Tarski se segueix immediatament utilitzant les propietats algebraiques de $S(G, X)$ demostrades a la Secció 2.4:

Demostració del Teorema 2.5.1 assumint el Teorema 2.5.2. Ja hem justificat (2) $\Rightarrow$ (1). Vegem l'altra implicació.

Per Teorema 2.5.2, basta demostrar que el tipus $[E]$ d'un subconjunt $E \subseteq X$ que no sigui paradoxal satisfà que $(n+1)[E] \not\leq n[E]$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per contrarecíproc, podem suposar que $(n+1)[E] \leq n[E]$ per a algun $n \in \mathbb{N}$ i veure que E és paradoxal o, equivalentment, que $2[E] = [E]$.

És clar per definició que sempre $n[E] \leq (n+1)[E]$. Per tant, com que $\leq$ és un ordre en $S(G, X)$ pel Corol·lari 2.4.1, la hipòtesi implica que $(n+1)[E] = n[E]$. Per tant, també per a qualsevol $m \geq n$ es té inductivament que $m[E] = n[E]$. En particular, $(2n)[E] = n[E]$, però aleshores

$$n(2[E]) = (2n)[E] = n[E]$$

i, per la llei de cancel·lació (Teorema 2.4.1), concloem que $2[E] = [E]$. $\square$

Per tant, només ens falta demostrar el Teorema 2.5.2.

Demostració del Teorema 2.5.2. La implicació $(2) \Rightarrow (1)$ és immediata, ja que un morfisme de grups preserva l'ordre algebraic, però la que realment necessitem per a la demostració del Teorema 2.5.1 és l'altra.

De totes maneres, comencem demostrant $(2) \Rightarrow (1)$. Suposem que existís $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1)e \leq ne$. Això significa, per definició, que existeix algun $s \in S$ tal que $ne = (n+1)e + s$. Però ara, utilitzant que μ és un morfisme, que $\mu(e) = 1$ i que $\mu(s) \geq 0$, obtenim que

$$n = n\mu(e) = \mu(ne) = \mu((n+1)e + s) = (n+1)\mu(e) + \mu(s) \geq n+1 !!$$

Hem arribat a contradicció, i doncs (1) queda demostrat.

Demostrem $(1) \Rightarrow (2)$. Comencem observant que basta saber construir el morfisme $\mu: S \rightarrow [0, \infty]$ per als elements de S que anomenem *fitats respecte* e , és a dir, elements $\alpha \in S$ tals que existeix algun $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq ne$. En efecte, un cop definit el morfisme μ en els elements de S fitats respecte e , podem estendre'l a tot S posant $\mu(\alpha) = \infty$ si α no és fitat per e .

Fent això μ no deixa de ser un morfisme: si $\alpha, \beta \in S$ són els dos fitats respecte e , aleshores $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$ per construcció; si algun dels dos, posem que α , no és fitat per e , aleshores $\mu(\alpha) = \infty$ i hem de veure que $\mu(\alpha + \beta) = \infty$. En efecte, $\mu(\alpha + \beta) = \infty$ perquè $\alpha + \beta$ no pot ser fitat per e , perquè si $\alpha + \beta \leq ne$ per a algun $n \in \mathbb{N}$, aleshores, per definició, existeix $\gamma \in S$ tal que $(\alpha + \beta) + \gamma = ne$, però aleshores $\alpha + (\beta + \gamma) = ne$, d'on $\alpha \leq ne$ i α seria fitat per e !!

Suposem doncs que tots els elements de S són fitats respecte e i construïm el morfisme $\mu: S \rightarrow [0, \infty]$. Per a fer-ho ens cal el següent claim:

Claim 2.5.1. *Si S_0 és un subconjunt finit de S contenint e , existeix una aplicació $\rho: S_0 \rightarrow [0, \infty]$ satisfent:*

- (i) $\rho(e) = 1$,
- (ii) *si $\varphi_i, \theta_j \in S_0$ satisfan que $\varphi_1 + \dots + \varphi_n \leq \theta_1 + \dots + \theta_m$, aleshores $\sum \rho(\varphi_i) \leq \sum \rho(\theta_j)$.*

Vegem com concloure el resultat a partir del claim. Donat $S_0 \subseteq S$ contenint e , escrivim

$$\mathcal{M}(S_0) = \{\rho: S \rightarrow [0, \infty] \mid \rho(e) = 1 \text{ i } \rho(\alpha + \beta) = \rho(\alpha) + \rho(\beta) \text{ si } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in S_0\}.$$

Observem que l'additivitat es pot demostrar a partir de la propietat (ii) del claim (prenent primer $\varphi_1 = \alpha, \varphi_2 = \beta, \theta_1 = \alpha + \beta$ i després $\varphi_1 = \alpha + \beta, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = \beta$). Per tant, el claim afirma en particular que $\mathcal{M}(S_0) \neq \emptyset$ per a qualsevol $S_0 \subseteq S$ finit amb $e \in S_0$ (el claim ens dóna una aplicació $\rho: S_0 \rightarrow [0, \infty]$ amb les propietats que volem que podem estendre a una aplicació $\rho: S \rightarrow [0, \infty]$ (que estarà doncs en $\mathcal{M}(S_0)$) definint-la a $S \setminus S_0$ de qualsevol manera).

Per a demostrar el que volem hem de trobar un element $\mu \in \mathcal{M}(S)$ o, equivalentment, veure que $\mathcal{M}(S) \neq \emptyset$. De fet, ens basta demostrar només que

$$\bigcap_{\substack{e \in S_0 \subseteq S \\ \#S_0 < \infty}} \mathcal{M}(S_0) \neq \emptyset$$

(de fet, fins i tot bastaria que $\bigcap_{\alpha, \beta \in S} \mathcal{M}(\{e, \alpha, \beta, \alpha + \beta\}) \neq \emptyset$, perquè només ens cal això per a concloure additivitat de μ per a qualsevol parell d'elements $\alpha, \beta \in S$, però veurem el de dalt pel mateix preu). Per a veure que la intersecció és no buida, veurem que és una intersecció de tancats en un espai compacte, i que la intersecció de qualsevol nombre finit d'aquests tancats és sempre no buida.

En efecte, sabem que $\{f: S \rightarrow [0, \infty]\} = [0, \infty]^S$ és compacte pel teorema de Tychonov. Per tant, si una família de subconjunts tancats seus satisfà que qualsevol intersecció finita és no buida, la intersecció total tampoc ho és.

Observem que $\mathcal{M}(S_0) \subseteq [0, \infty]^S$ és tancat per a qualsevol $e \in S_0 \subseteq S$ finit. Per a veure-ho, demostrem que el seu complementari és obert. Observem que que $f \in \mathcal{M}(S_0)$ depèn únicament dels valors de f en els elements de S_0 (les coordenades de f en S_0 , pensant $f \in [0, \infty]^S$), i hi ha una quantitat finita d'aquests. Si $f \notin \mathcal{M}(S_0)$, vol dir o bé que $f(e) \neq 1$ o bé que $f(\alpha + \beta) \neq f(\alpha) + f(\beta)$ per a alguns $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in S_0$. Deixant variar la coordenada e o les coordenades $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ suficientment poc, trobem tot un entorn obert de $f \in [0, \infty]^S$ on la condició tampoc se satisfà i, per tant, és un entorn de f totalment contingut en $[0, \infty]^S \setminus \mathcal{M}(S_0)$. Això demostra, doncs, que $\mathcal{M}(S_0) \subseteq [0, \infty]^S$ és tancat.

Ara, observem que $\{\mathcal{M}(S_0) \mid e \in S_0 \subseteq S, \#S_0 < \infty\}$ és una família de tancats de $[0, \infty]^S$ que té la propietat anterior de la intersecció finita. En efecte, $\mathcal{M}(S_1) \cap \dots \cap \mathcal{M}(S_n) \supseteq \mathcal{M}(S_1 \cup \dots \cup S_n)$, i aquest últim conjunt és no buit pel claim: $S_1 \cup \dots \cup S_n$ és un subconjunt finit de S contenint e . Per tant, la compacitat de $[0, \infty]^S$ ens permet concloure que existeix $\mu \in \mathcal{M}(S_0)$ per a qualsevol $e \in S_0 \subseteq S$ finit.

Aquest μ és el morfisme que buscàvem: com que $\mu \in \mathcal{M}(e)$ (per exemple), tenim que $\mu(e) = 1$; donats $\alpha, \beta \in S$, tenim que $\mu \in \mathcal{M}(\{e, \alpha, \beta, \alpha + \beta\})$, i això ens diu que $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$.

Falta demostrar el claim.

Demostració del claim. Ho demostrem per inducció en $\#S_0$.

Cas base, $\#S_0 = 1$: En aquest cas, necessàriament $S_0 = \{e\}$ i podem definir $\rho: \{e\} \rightarrow [0, \infty]$ com $\rho(e) = 1$. La propietat (ii) se satisfà perquè $ne \leq$

$me \Rightarrow n \leq m$ per la hipòtesi (1) del teorema: en efecte, si $n > m$ tindríem que $ne = (m+1)e + (n-m-1)e \geq (m+1)e$, de forma que $(m+1)e \leq ne \leq me$!!

Pas inductiu: Suposem que $\#S_0 > 1$ i prenem un element qualsevol $x \in S_0 \setminus \{e\}$. Per hipòtesi d'inducció, sabem construir una aplicació $\rho: S_0 \setminus \{x\} \rightarrow [0, \infty]$ satisfent les dues propietats (i) i (ii). Hem de definir ρ en x de forma que es continuï satisfent. Concretament, de l'únic que ens hem d'assegurar és que sempre que

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_n + kx \leq \theta_1 + \dots + \theta_m + k'x$$

per a alguns $\varphi_i, \theta_j \in S_0 \setminus \{x\}$ i $k, k' \geq 0$, tinguem que

$$\rho(\varphi_1) + \dots + \rho(\varphi_n) + k\rho(x) \leq \rho(\theta_1) + \dots + \rho(\theta_m) + k'\rho(x).$$

Això ens dóna una restricció per a escollir $\rho(x)$ (sempre que $k \neq k'$): si $k < k'$, necessitem que

$$\rho(x) \geq \frac{\rho(\varphi_1) + \dots + \rho(\varphi_n) - \rho(\theta_1) - \dots - \rho(\theta_m)}{k' - k};$$

si $k' < k$, necessitem que

$$\rho(x) \leq \frac{\rho(\varphi_1) + \dots + \rho(\varphi_n) - \rho(\theta_1) - \dots - \rho(\theta_m)}{k' - k}.$$

Tant aquí com a la resta de la demostració del claim podem restar $\rho(s)$ per a qualsevol $s \in S_0 \setminus \{x\}$ perquè, com que estem suposant que tots els elements de $S \supseteq S_0$ són fitats respecte e i que $\rho: S_0 \setminus \{x\} \rightarrow [0, \infty]$ satisfà les propietats (i) i (ii) per hipòtesi d'inducció, no pot ser que cap element s de $S_0 \setminus \{x\}$ tingui $\rho(s) = \infty$: com que s és fitat per e , existeix un n natural tal que $s \leq ne$ i les propietats (i) i (ii) impliquen que $\rho(s) \leq n\rho(e) = n < \infty$.

En lloc d'intentar satisfer totes les restriccions anteriors, ens assegurarem només de definir $\rho(x)$ perquè satisfaci aquelles restriccions per a les quals $k = 0$ (i, per tant, sempre $k < k'$). Després veurem que, havent assegurat això, $\rho(x)$ també satisfarà qualsevol altra possible restricció. Per tant, definim

$$\rho(x) := \sup_{\substack{\varphi_i, \theta_j \in S_0 \setminus \{x\}, k' \geq 1 \\ \varphi_1 + \dots + \varphi_n \leq \theta_1 + \dots + \theta_m + k'x}} \left\{ \frac{\rho(\varphi_1) + \dots + \rho(\varphi_n) - \rho(\theta_1) - \dots - \rho(\theta_m)}{k'} \right\}.$$

Vegem ara que, sempre que es tingui que $\varphi_1 + \dots + \varphi_n + kx \leq \theta_1 + \dots + \theta_m + k'x$ per a alguns $\varphi_i, \theta_j \in S_0 \setminus \{x\}$ i alguns $k, k' \geq 0$ es té que $\rho(\varphi_1) + \dots + \rho(\varphi_n) + k\rho(x) \leq \rho(\theta_1) + \dots + \rho(\theta_m) + k'\rho(x)$.

Si $k = k' = 0$, la desigualtat se satisfà per hipòtesi d'inducció. Pensem ara en què k és arbitrari i $k' \neq 0$; en un cert punt ens caldrà dividir per k' , per això haurérem de discutir el cas $k' = 0$ a part. Prenem qualssevol $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q \in S_0 \setminus \{x\}, r \geq 0$ que satisfacin que $\beta_1 + \dots + \beta_p \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_q + rx$; en particular, per definició de $\rho(x)$, tenim que

$$\rho(x) \geq \frac{\rho(\beta_1) + \dots + \rho(\beta_p) - \rho(\gamma_1) - \dots - \rho(\gamma_q)}{r} =: z$$

i, de fet, $\rho(x)$ és el suprem d'aquests z per a les diferents possibilitats de β 's, γ 's i r . Anem a veure que

$$\rho(\varphi_1) + \cdots + \rho(\varphi_n) + kz \leq \rho(\theta_1) + \cdots + \rho(\theta_m) + k'\rho(x). \quad (*)$$

Un cop vist això, prenent suprem en z recuperem la desigualtat desitjada.

Per a veure aquesta desigualtat, recordem que tenim aquestes dues:

$$\begin{cases} \varphi_1 + \cdots + \varphi_n + kx \leq \theta_1 + \cdots + \theta_m + k'x & (a) \\ \beta_1 + \cdots + \beta_p \leq \gamma_1 + \cdots + \gamma_q + rx & (b) \end{cases}$$

Anem a utilitzar (b) per a fer desaparèixer x del costat esquerre de (a) i així poder utilitzar la definició de ρ per a deduir la desigualtat (*). Concretament, multipliquem (a) per r i li sumem $k\gamma_1 + \cdots + k\gamma_q$; al costat esquerre hi reconeixem el costat dret de (b) multiplicat per k , així que utilitzem la desigualtat (b) multiplicada per k . Finalment, el que obtenim és

$$r\varphi_1 + \cdots + r\varphi_n + k\beta_1 + \cdots + k\beta_p \leq r\theta_1 + \cdots + r\theta_m + k\gamma_1 + \cdots + k\gamma_q + rk'x.$$

Ara, utilitzant la definició de ρ (i suposant que $k' \neq 0$), deduïm que

$$\rho(x) \geq \frac{r \sum \rho(\varphi_i) + k \sum \rho(\beta_s) - r \sum \rho(\theta_j) - k \sum \rho(\gamma_t)}{rk'}$$

Reordenant i reconeixent la definició de z , obtenim la desigualtat (*) que volíem demostrar.

Finalment, ens queda discutir el cas $k' = 0$. La idea és la mateixa que en el cas genèric. Tenim que $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n + kx \leq \theta_1 + \cdots + \theta_m$ i volem demostrar que $\rho(\varphi_1) + \cdots + \rho(\varphi_n) + k\rho(x) \leq \rho(\theta_1) + \cdots + \rho(\theta_m)$. Procedim exactament igual que en el cas genèric fins a obtenir la desigualtat

$$r\varphi_1 + \cdots + r\varphi_n + k\beta_1 + \cdots + k\beta_p \leq r\theta_1 + \cdots + r\theta_m + k\gamma_1 + \cdots + k\gamma_q + rk'x.$$

Ara, com que $k' = 0$, el que obtenim realment és

$$r\varphi_1 + \cdots + r\varphi_n + k\beta_1 + \cdots + k\beta_p \leq r\theta_1 + \cdots + r\theta_m + k\gamma_1 + \cdots + k\gamma_q.$$

Ara bé, com que cap dels sumands és x , podem aplicar la hipòtesi d'inducció i deduïm que

$$r \sum \rho(\varphi_i) + k \sum \rho(\beta_s) \leq r \sum \rho(\theta_j) + k \sum \rho(\gamma_t).$$

Reordenant els termes i reconeixent la definició de z obtenim que

$$\rho(\varphi_1) + \cdots + \rho(\varphi_n) + kz \leq \rho(\theta_1) + \cdots + \rho(\theta_m),$$

d'on, prenent suprem en z recuperem la desigualtat

$$\rho(\varphi_1) + \cdots + \rho(\varphi_n) + k\rho(x) \leq \rho(\theta_1) + \cdots + \rho(\theta_m),$$

que és la que volíem demostrar. $\square$

Un cop demostrat el claim, en deduïm el teorema com hem explicat abans de la demostració del claim. $\square$

Observació 2.5.1. A la demostració del claim també podríem haver definit

$$\rho(x) := \inf_{\substack{\varphi_i, \theta_j \in S_0 \setminus \{x\}, k \geq 1 \\ \varphi_1 + \dots + \varphi_n + kx \leq \theta_1 + \dots + \theta_m}} \left\{ \frac{\rho(\theta_1) + \dots + \rho(\theta_n) - \rho(\varphi_1) - \dots - \rho(\varphi_m)}{k} \right\},$$

assegurant-nos de satisfer les restriccions per a $\rho(x)$ provinents de desigualtats on $k' = 0$ en lloc d'aquelles provinents de desigualtats on $k = 0$, com hem fet a la demostració de dalt. En aquest cas, un argument completament simètric al que hem donat nosaltres permet igualment concloure la demostració.

Bibliografia

- [1] Pere Ara. La paradoxa de Banach-Tarski i el semigrup de tipus. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 35(1):5–22, 2020.
- [2] Stefan Banach and Alfred Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6:244–277, 1924.
- [3] John M. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*, volume 12 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. Oxford University Press, 1995.
- [4] Grzegorz Tomkiewicz and Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox*. Cambridge University Press, 2016.