Comparaison des modules d'extensions dans des catégories de foncteurs

Alain Troesch*

Résumé

Soit p un nombre premier. On donne un théorème de comparaison entre les modules d'extensions $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, F)$ d'une part dans la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs des espaces vectoriels finis sur $\mathbb{F}_p$ vers tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$, d'autre part dans la catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux introduite par Friedlander et Suslin.

Abstract

Let p be a prime. We give a comparison theorem between Ext-modules in the category $\mathcal{F}$ of functors from finite $\mathbb{F}_p$-vector spaces to all vector spaces, and Ext-modules in the category $\mathcal{P}$ of strict polynomial fonctors which has been introduced by Friedlander and Suslin, when the first variable in Ext is the inclusion functor Id.

Introduction

Soit p un nombre premier. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels finis sur $\mathbb{F}_p$ vers la catégorie de tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$. Par exemple, le foncteur inclusion Id est un objet de $\mathcal{F}$, ainsi que les puissances symétriques S^n, extérieures Λ^n et divisées Γ^n.

Cette catégorie $\mathcal{F}$ a trouvé son importance dans son lien avec la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, cf [6, 8]. Pour cette raison, elle a suscité des travaux d'algèbre homologique, comme par exemple le calcul par Franjou, Lannes et Schwartz des groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$, cf [4], ou le calcul, par l'auteur, de groupes similaires obtenus en remplaçant la puissance symétrique par une composition quelconque de puissances symétriques (cf [10, 11, 12], en caractéristique 2 seulement).

*L'auteur a bénéficié pendant une partie de la réalisation de ce travail d'une bourse pré-doctorale Marie Curie de la Commission Européenne HPMT-CT-2000-00075.

Dans l'optique de relier les calculs de Franjou, Lannes et Schwartz à des propriétés sur la cohomologie rationnelle des schémas en groupes, Friedlander et Suslin ont défini une catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux, et ont adapté le calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$ dans cette catégorie, cf [5]. Ils ont été dans la nécéssité d'*adapter* ce calcul, au lieu de *déduire* le résultat de celui de Franjou, Lannes et Schwartz, car ils ne disposaient pas d'un théorème permettant de comparer les groupes d'extension dans ces deux catégories.

Plus tard, Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin ont donné un théorème de comparaison général, cf [3]. Cependant, ce théorème est loin d'être complet dans le sens où on ne peut en général pas en déduire des groupes d'extensions dans une catégorie les groupes d'extensions similaires dans l'autre catégorie.

Dans le cas où la première variable est le foncteur inclusion Id, on donne une comparaison complète des espaces vectoriels gradués $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, F)$ dans [10]. L'objet de cet article est d'affiner ce résultat : l'isomorphisme obtenu dans [10] est non seulement un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués, mais mieux, un isomorphisme de modules de Yoneda, c'est à dire de modules (à droite, pour la composition de Yoneda des extensions) sur l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$. C'est l'objet du théorème 2.1.

Un tel théorème de comparaison est particulièrement intéressant dans la mesure où les calculs sont plus faciles à effectuer dans la catégorie $\mathcal{P}$ que dans la catégorie $\mathcal{F}$, essentiellement car les dimensions injectives et projectives sont finies dans $\mathcal{P}$.

Dans un premier temps, on fait quelques rappels concernant les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$. Cela permettra dans un second temps d'énoncer le théorème principal, et de faire quelques commentaires sur sa signification. Avant de démontrer ce théorème dans la quatrième partie, on rappelle brièvement certains points concernant les suites spectrales d'hypercohomologie dans la troisième partie.

1 Rappels concernant les catégories de foncteurs

Dans cette section, nous rappelons certaines définitions et certains résultats concernant les catégories de foncteurs, dont nous aurons besoin pour démontrer le théorème principal.

Soit p un nombre premier quelconque. On note $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vecoriels sur $\mathbb{F}_p$, et $\mathcal{E}^f$ celle des espaces vectoriels de dimension finie. La catégorie $\mathcal{F}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ vers $\mathcal{E}$. Le foncteur inclusion Id de $\mathcal{E}^f$ dans $\mathcal{E}$ est un objet de $\mathcal{F}$, ainsi que la n-ième puissance symétrique S^n, définie sur $V \in \mathcal{E}^f$ comme le quotient de $V^{\otimes n}$ par l'action du groupe symétrique consistant à permuter les facteurs.

On définit maintenant la catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux. Pour tout couple (V, W) d'espaces vectoriels, on note $\mathrm{Hom}_{pol}(V, W)$ l'espace vectoriel $S^*(V^*) \otimes W$. C'est l'*espace des morphismes strictement polynomiaux* de V vers W. On dira qu'un morphisme strictement polynomial f de V vers W est *homogène de degré* d s'il est élément de $S^d(V^*) \otimes W$. Un morphisme strictement polynomial de V dans W définit par oubli de la structure strictement polynomiale une application polynomiale au sens usuel de V dans W. Suivant Friedlander et Suslin, [5], on définit :

DÉFINITION 1.1 Un *foncteur strictement polynomial* P est la donnée de :
- une application des objets de $\mathcal{E}^f$ vers les objets de $\mathcal{E}^f$: $V \mapsto P(V)$;
- une application associant à tout couple (V, W) de $\mathcal{E}^f$ un morphisme strictement polynomial $P_{V,W}$ de $\mathrm{Hom}(V, W)$ vers $\mathrm{Hom}(P(V), P(W))$;

tels que
- $P_{V,V}(id_V) = id_{P(V)}$;
- les applications $P_{V,W}$ sont compatibles avec la composition dans le sens usuel.

On dit qu'un foncteur strictement polynomial est *homogène de degré* d si tous les morphismes strictement polynomiaux $P_{V,W}$ sont homogènes de degré d.

Soit $\mathcal{P}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux, et les morphismes sont les transformations naturelles dans le sens usuel. On note $\mathcal{P}_d$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}$ constituée des foncteurs homogènes de degré d. L'oubli de la structure *strictement* polynomiale induit un foncteur oubli

$$U \ : \ \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Le foncteur identité Id, et les puissances symétriques sont des objets de $\mathcal{P}$. On définit maintenant un foncteur Tw (twist de Frobenius), différent de Id, mais ayant même image par le foncteur oubli U. Le foncteur Tw est défini par l'identité sur les objets, et la puissance p-ième formelle sur les morphismes, p étant la caractéristique du corps de base. C'est un foncteur homogène de degré p. Par composition à gauche, le twist de Frobenius définit pour tout foncteur strictement polynomial F un foncteur $F^{(1)} = F \circ \mathrm{Tw}$, et plus généralement, un foncteur $F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ \mathrm{Tw}$, appelé n-ième twist de Frobenius du foncteur F. Tous les foncteurs $F^{(n)}$, $n \geqslant 0$, ont même image F par le foncteur oubli U.

Un des atouts essentiels de la catégorie $\mathcal{P}$ par rapport la catégorie $\mathcal{F}$ en ce qui concerne les calculs provient de l'existence d'un système de cogénérateurs injectifs aisé à décrire et à manipuler.

Proposition 1.2 *Les foncteurs $S^{i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_s}$, $i_1 + \cdots + i_s = d$, forment un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}_d$.*

Ce système de cogénérateurs injectifs permet de construire dans $\mathcal{P}$ des résolutions injectives particulières, qui donnent, par application du foncteur oubli U, des résolutions (non injectives) d'un type particulier dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.3 Soit F un foncteur dans $\mathcal{P}_d$. Une *S-résolution de F dans $\mathcal{P}$* est une résolution injective de F construite à partir des cogénérateurs injectifs de la proposition 1.2, c'est-à-dire une résolution égale en tout degré à une somme directe de produits tensoriels de puissances symétriques, de degré total d. Une telle résolution existe toujours. Une *S-résolution de F dans $\mathcal{F}$* est l'image par U d'une S-résolution dans $\mathcal{P}$. Ce n'est pas une résolution *injective*.

La description du système de cogénérateurs injectifs de la proposition 1.2 souligne que dans l'optique de calculer en général $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, F)$ (dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$) pour un foncteur F dans $\mathcal{P}$, ou dans l'image de $\mathcal{P}$ par le foncteur oubli U, il est intéressant de savoir calculer ces groupes dans le cas où F est une puissance symétrique, et dans le cas où F est un produit tensoriel. Ce dernier cas trouve sa réponse dans un résultat de Pirashvili.

Théorème 1.4 (Pirashvili, [7]) *Soit F et G deux objets de $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{P}$) tels que $F(0) = 0 = G(0)$. Soit A un foncteur additif (par exemple $A = \mathrm{Id}$ dans $\mathcal{F}$, ou $A = \mathrm{Id}^{(n)}$ dans $\mathcal{P}$). Alors*

$$\mathrm{Ext}^*(A, G \otimes F) = 0.$$

Le premier cas provient des calculs de Franjou, Lannes et Schwartz, pour la catégorie $\mathcal{F}$, et de Friedlander et Suslin pour la catégorie $\mathcal{P}$:

Théorème 1.5 ([4, 5]) *En tant qu'algèbre unitaire (avec la structure de Yoneda), $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ est engendrée par des représentants e_ℓ, $\ell > 0$ en degré $2p^{\ell-1}$, les seules relations entre ces générateurs étant la commutativité et* *les relations* $e_\ell^p = 0$. *Le module de Yoneda* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$ *est nul si* n *n'est pas une puissance de* p. *Le module de Yoneda* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h})$ *est le quotient de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ *par l'idéal engendré par* $e_1, \dots, e_h$. *On en déduit notamment une structure d'*algèbre *sur* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h})$.

En tant qu'algèbre unitaire graduée, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathrm{Id}^{(n)})$ *est engendrée par des éléments* $e_\ell^{(n-\ell)}$ *de* $\mathrm{Ext}^{2p^{\ell-1}}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathrm{Id}^{(n)})$, *avec* $0 < \ell \leqslant n$, *soumis uniquement aux relations* $\left(e_\ell^{(n-\ell)}\right)^p = 0$, *et aux relations de commutativité. Pour* h *vérifiant* $0 \leqslant h \leqslant n$, *le module de Yoneda à droite* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, S^{p^h(n-h)})$ *est le quotient de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathrm{Id}^{(n)})$ *par l'idéal engendré par* $e_1^{(n-1)}, \dots, e_h^{(n-h)}$. *On en déduit une structure d'*algèbre *sur* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, S^{p^h(n-h)})$.

C'est la comparaison des modules obtenus dans le théorème 1.5 dans les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ qui est à la base, *via* l'existence de S-résolutions, du théorème de comparaison proposé en 2.1.

On mentionne enfin le résultat suivant, qui joue un rôle essentiel dans notre démonstration.

Théorème 1.6 (Totaro, [9]) *Soit* F *un foncteur strictement polynomial homogène de degré* d. *Alors sa dimension projective est inférieure ou égale à* $2d - 2$.

2 Commentaires sur le résultat principal

Le résultat principal est un théorème de comparaison des modules d'extensions dont la première variable est l'identité, dans les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$. Notons que cette comparaison était déjà connue, si on ne considère que la structure d'espace vectoriel gradué, cf [10]. Le point nouveau par rapport à [10] réside donc dans la comparaison des structures de *modules de Yoneda.*

Théorème 2.1 *Soit* F *un objet de* $\mathcal{P}$, *homogène de degré* n.

- *Si* n *n'est pas une puissance de* p, *alors* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F) = 0$.
- *Si* $n = p^h$, *alors on a des isomorphismes* de modules de Yoneda

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)}) &\cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}), \\
\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F) &\cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h}).
\end{aligned}$$

On précise ce qu'on entend par *isomorphisme de modules*, c'est-à-dire comment pourvoir le produit tensoriel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}) \tag{1}$$

d'une structure de module. Soit A et A' deux $\mathbb{F}_p$-algèbres graduées. Suivant [1], on construit une structure d'algèbre sur $A \otimes_{\mathbb{F}_p} A'$ en définissant le produit d'éléments homogènes par

$$(a \otimes a') \cdot (b \otimes b') = (-1)^{kh}(ab) \otimes (a'b'),$$

où k est le degré de a' et h est le degré de b. Soit ensuite M et M' deux modules (à droite) gradués, respectivement sur A et sur A'. Toujours suivant [1], on construit sur $M \otimes_{\mathbb{F}_p} M'$ une structure de module (à droite) gradué sur l'algèbre $A \otimes_{\mathbb{F}_p} A'$ en posant, pour des éléments homogènes,

$$(a \otimes a') \cdot (m \otimes m') = (-1)^{kh}(am) \otimes (a'm'),$$

où k est le degré de a', et h celui de m.

Remarquons maintenant que l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ est isomorphe, avec les définitions ci-dessus, au produit tensoriel d'algèbres

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)}) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)}) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}). \tag{2}$$

Comme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ est une algèbre sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)})$, et que l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$ est de manière triviale un module sur elle-même, on en déduit, d'après la construction ci-dessus et l'égalité (2) une structure de module sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ pour le produit tensoriel (1). C'est cette structure que l'on considère dans le théorème 2.1. On remarquera que comme les deux algèbres considérées sont concentrées en degrés pairs, les signes apparaissant dans les formules ci-dessus sont dans ce cas toujours positifs.

Explicitons l'identification (2) ainsi que la structure de module obtenue sur (1). L'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ est engendrée par des générateurs multiplicatifs $e_i^{(h+k-i)}$, $1 \leqslant i \leqslant h+k$, soumis aux relations de commutativité, et aux relations $(e_i^{(h+k-i)})^p = 0$. L'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)})$ est engendrée par des générateurs multiplicatifs $e_i^{(h-i)}$, $1 \leqslant i \leqslant h$, soumis aux relations de commutativité, et aux relations $(e_i^{(h-i)})^p = 0$. L'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$ est engendrée multiplicativement par des générateurs e'_i, $h+1 \leqslant i \leqslant h+k$, soumis aux relations de commutativité, et aux relations $(e'_i)^p = 0$. On note aussi $e_0^{(h+k)}$, $e_0^{(h)}$ et e'_0 les unités respectives de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)})$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$. Une base de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)}) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$$

est donnée par les éléments

$$(e_1^{(h-1)})^{\alpha_1} \cdots (e_h^{(0)})^{\alpha_h} \otimes (e'_{h+1})^{\alpha_{h+1}} \cdots (e'_{h+k})^{\alpha_{h+k}},$$

avec $0 \leqslant \alpha_i < p$. Un tel élément est identifié par (2) à

$$(e_1^{(h+k-1)})^{\alpha_1} \cdots (e_h^{(k)})^{\alpha_h} \cdot (e_{h+1}^{(k-1)})^{\alpha_{h+1}} \cdots (e_{h+k}^{(0)})^{\alpha_{h+k}} \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)}).$$

Par conséquent, la structure de module obtenue sur (1) est décrite par les formules suivantes, donnant l'action des générateurs $e_i^{(h+k-i)}$:

$$(f_1 \otimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} = \begin{cases} (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \otimes f_2 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant h, \\ f_1 \otimes (f_2 \cdot e_i^{(h+k-i)}) & \text{si } h+1 \leqslant i \leqslant h+k. \end{cases} \tag{3}$$

Ces considérations sont bien sûr aussi vraies pour le cas de $\mathcal{F}$.

3 Suites spectrales d'hypercohomologie

On rappelle brièvement quelques faits élémentaires concernant les suites spectrales d'hypercohomologie. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [2, 13].

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs. C'est le cas par exemple de $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ ou $\mathcal{B} = \mathcal{P}$. Soit $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe d'objets de $\mathcal{B}$, et soit $I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathcal{C}^\bullet$. La double indexation de $I^{\bullet\bullet}$ est telle que pour tout n, $I^{n,\bullet}$ est une résolution injective de $\mathcal{C}^\bullet$. On se fixe un objet quelconque T de $\mathcal{B}$. Le complexe double $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T, I^{\bullet\bullet})$ peut être filtré soit suivant les colonnes, soit suivant les lignes. Ces deux filtrations définissent deux suites spectrales, appelées respectivement première et seconde suites spectrales d'hypercohomologie du complexe $\mathcal{C}^\bullet$, et notées respectivement ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{I}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ et ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{II}(T, \mathcal{C}^\bullet)$.

Résultat 3.1 *Les deux suites spectrales d'hypercohomologie d'un complexe $\mathcal{C}^\bullet$ sont décrites aux rangs initiaux par*
- ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{I}_1^{s,t}(T, \mathcal{C}^\bullet) = \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{B}}(T, \mathcal{C}^s)$;
- ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{II}_2^{s,t}(T, \mathcal{C}^\bullet) = \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{B}}(T, H^t(\mathcal{C}^\bullet))$.

Dans les conventions d'indexation utilisées ici, les différentielles de rang r sont de bidegré $(r, 1-r)$. Les aboutissements de ces deux suites spectrales sont des gradués d'un même objet $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{B}}(T, \mathcal{C}^\bullet)$.

4 Preuve du théorème 2.1

Dans [11], on montre l'isomorphisme du théorème 2.1 en tant qu'espace vectoriel gradué, mais pas en tant que module. On rappelle ici les grandes lignes de la démonstration telle qu'elle apparaît dans [11], pour pouvoir ensuite étudier la structure de module.

On laisse de côté le cas où F est homogène de degré n différent d'une puissance de p, qui ne diffère pas de [11]. Soit donc un foncteur F homogène de degré p^h. Soit $\mathcal{R}_F^\bullet$ une S-résolution de F. On considère les suites spectrales ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathcal{R}_F^\bullet)$, ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$ et ${}_{\mathcal{F}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}, \mathcal{R}_F^\bullet)$, convergeant respectivement vers $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$. En rang 2, on peut décrire chacune des colonnes de ces suites spectrales, *en tant que module de Yoneda* :

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_2^{s,*}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathcal{R}_F^\bullet) &= \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, S^{p^h})^{\oplus d_s} \\ {}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_2^{s,*}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)}) &= \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})^{\oplus d_s} \\ {}_{\mathcal{F}}\mathbf{I}_2^{s,*}(\mathrm{Id}, \mathcal{R}_F^\bullet) &= \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h})^{\oplus d_s}, \end{aligned}$$

où d_s est la dimension de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$. En effet, c'est trivialement vrai pour la première égalité, car dans ce cas, la suite spectrale dégénère au rang 2, et doit converger vers $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$. Puisque les seuls endofoncteurs de S^{p^h} sont les multiples de l'identité, cela implique la connaissance des différentielles sur les facteurs égaux à S^{p^h} de la S-résolution $\mathcal{R}_F^\bullet$, puis les deux autres égalités. On obtient donc les isomorphismes suivants *d'espaces vectoriels bigradués* :

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_2^{*_1,*_2}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)}) &\cong \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}), \quad (4) \\ {}_{\mathcal{F}}\mathbf{I}_2^{*_1,*_2}(\mathrm{Id}, \mathcal{R}_F^\bullet) &\cong \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h}). \quad (5) \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour achever de montrer l'égalité du théorème en tant qu'espaces vectoriels gradués, de montrer que les suites spectrales dégénèrent au rang 2.

D'après le théorème 1.5,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}) &= \mathbb{F}_p \text{ si } s = 2ip^h,\ 0 \leqslant i < p^k, \\ &= 0 \text{ sinon}\,; \\ \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h}) &= \mathbb{F}_p \text{ si } s = 2ip^h,\ i \geqslant 0, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Ainsi, les classes non nulles des suites spectrales ci-dessus sont concentrées sur les lignes multiples de $2p^h$. Plus précisément, chaque ligne d'abscisse $2ip^h$, $0 \leqslant i < p^k$, de ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_2(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$ est égale à l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$, les autres lignes étant nulles. De même pour ${}_{\mathcal{F}}\mathbf{I}_2(\mathrm{Id}, \mathcal{R}_F^{\bullet})$ sans borne supérieure sur i. En particulier, seules les différentielles de rang $2ip^h + 1$, $i > 0$, peuvent ne pas être nulles. D'un autre coté, d'après le théorème 1.6, $\mathrm{Id}^{(h)}$ est de dimension projective au plus $2p^h - 2$. Il en résulte que

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) = 0$$

pour $* > 2p^h - 2$: les suites spectrales ci-dessus sont nulles en abscisses strictement supérieures à $2p^h - 2$. En particulier, les différentielles non nulles sont forcément de rang inférieur ou égal à $2p^h - 2$. Les différentielles sont donc toutes nulles.

Pour montrer que (4) est un isomorphisme de modules, on utilise la structure de module de Yoneda des suites spectrales, qu'on a déjà évoquée dans [11] : la suite spectrale ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$ est en tout rang un module différentiel sur l'algèbre de Yoneda $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$. Cette structure fournit une structure de module de Yoneda sur l'aboutissement de la suite spectrale. Alors, l'aboutissement est un gradué de la cohomologie totale *en tant que module de Yoneda.* De même pour la seconde suite spectrale. La seconde suite spectrale ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$ est égale en rang 2 *en tant que module* à $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$ sur sa ligne d'ordonnée 0, et dégénère au rang 2. Ainsi, la cohomologie totale est égale, *en tant que module de Yoneda,* à $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$.

Soit $f_1 \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$, et $e'_0 \in \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$ l'extension correspondant à l'unité de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$. On définit l'élement $f_1 \boxtimes e'_0$ de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$ comme étant l'image de f_1 par le morphisme induit par le twist

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)}) \\ f & \longmapsto & f^{(k)}. \end{array} \tag{6}$$

On définit un morphisme d'algèbres

$$\xi \;:\; \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{2^h}(k)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)}) \tag{7}$$

en envoyant le générateur e'_i, $h < i < h+k$ sur le générateur $e_i^{(h+k-i)}$ de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$. On prendra garde au fait que ce morphisme d'algèbres n'est pas un morphisme de modules de Yoneda. Cependant, si $i > h$, alors

$$\xi(f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} = \xi(f_2 \cdot e_i^{(h+k-i)}). \tag{8}$$

On définit l'élément $f_1 \boxtimes f_2$ de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s+2p^i}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$ comme étant la composition de Yoneda de $f_1 \boxtimes e_0^{(h+k)}$ et $\xi(f_2)$:

$$f_1 \boxtimes f_2 = (f_1 \boxtimes e_0') \cdot \xi(f_2).$$

L'application $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \boxtimes f_2$ est bilinéaire, du fait que l'application (6) est linéaire, ainsi que le morphisme (7) et la composition de Yoneda. Ainsi, cela permet de définir un morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)}) \\ f_1 \otimes f_2 & \longmapsto & f_1 \boxtimes f_2. \end{array} \tag{9}$$

On va montrer que le morphisme ci-dessus est un isomorphisme de modules gradués. Montrons dans un premier temps qu'il s'agit d'un morphisme de modules de Yoneda. La structure de module de Yoneda du produit tensoriel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$$

est décrite par les égalités (3). Pour montrer que (9) est un morphisme de modules, il suffit donc de vérifier que si $i \leqslant h$, alors

$$(f_1 \boxtimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} = (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \boxtimes f_2,$$

et si $i > h$, alors

$$(f_1 \boxtimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} = f_1 \boxtimes (f_2 \cdot e_i^{(h+k-i)}).$$

Soit $i > h$. Alors, $e_i^{(h+k-i)}$ est un élément de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{2p^{i-1}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$, avec $2p^{i-1} \geqslant 2p^h$, et

$$\begin{aligned} (f_1 \boxtimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} &= (f_1 \boxtimes e_0^{(h+k)}) \cdot (\xi(f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)}) \\ &= (f_1 \boxtimes e_0) \cdot \xi(f_2 \cdot e_i^{(h+k-i)}) \\ &= f_1 \boxtimes (f_2 \cdot e_i^{(h+k-i)}). \end{aligned}$$

La seconde égalité résulte de l'observation (8).

Soit maintenant $i \leqslant h$. On peut trouver f et e tels que $f_2 = f \cdot e$, avec

- $f \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^0(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$,
- $e \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^t(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$.

Puisque t est un multiple de $2p^h$, e s'écrit, à multiplication par un scalaire près, comme un produit de classes $e_j^{(h+k-j)}$ avec $j > h$. Le point précédent montre alors que

$$f_1 \boxtimes f_2 = f_1 \boxtimes (f \cdot e) = (f_1 \boxtimes f) \cdot e,$$

puis que

$$(f_1 \boxtimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} = (f_1 \boxtimes f) \cdot e \cdot e_i^{(h+k-i)} = (f_1 \boxtimes f) \cdot e_i^{(h+k-i)} \cdot e,$$

puisque l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ est commutative. Ainsi, si on parvient à montrer que $(f_1 \boxtimes f) \cdot e_i^{(h+k-i)} = (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \boxtimes f$, on en déduira

$$(f_1 \boxtimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} = ((f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \boxtimes f) \cdot e = (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \boxtimes (f \cdot e) = (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \otimes f_2,$$

l'avant-dernière égalité résultant du point précédent. Ainsi, on peut se limiter au cas où $t = 0$.

Supposons donc toujours $i \leqslant h$, et cette fois, $t = 0$, c'est-à-dire $f_2 = e'_0$. Alors

$$\begin{aligned}
(f_1 \boxtimes f_2) \cdot e_i^{(h+k-i)} &= (f_1 \boxtimes e'_0) \cdot e_i^{(h+k-i)} \\
&= f_1^{(k)} \cdot e_i^{(h+k-i)} \\
&= (f_1 \cdot e_i^{(h-i)})^{(k)} \\
&= (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \boxtimes e'_0 \\
&= (f_1 \cdot e_i^{(h-i)}) \boxtimes f_2.
\end{aligned}$$

On montre enfin que le morphisme (9) est un isomorphisme. Pour tous foncteurs strictement polynomiaux P et Q, et tout entier s, l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(P, Q)$ est de dimension finie. De plus, les dimensions injectives et projectives de tout élément de $\mathcal{P}$ étant *finies*, les espaces $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(P, Q)$ sont non nuls seulement pour un nombre *fini* d'entiers s. Ainsi, l'espace total $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(P, Q)$ est de dimension finie. Par conséquent, le morphisme (9) est un morphisme entre espaces vectoriels de *dimension finie*. De plus, l'égalité du théorème 2.1 étant prouvé en tant qu'isomorphisme d'espaces vectoriels, les dimensions des espaces source et but sont égales. Ainsi, pour montrer que (9) est un isomorphisme, il suffit de vérifier qu'il est injectif. Soit $f_1 \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ et $f_2 \in \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{2^h(k)})$ des extensions *non nulle*. Soit $e \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ tel que $f_2 = e'_0 \cdot e$. Puisque, d'après [3], le morphisme (6) induit par le twist est une *injection*, $f_1^{(k)}$ est non nul, et donc par définition $f_1 \boxtimes e'_0$ est non nul. C'est un élément de la cohomologie totale $\mathrm{Ext}^{*-1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$ de ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$ en degré total $s+1$. D'après [9], $s \leqslant 2p^h - 2$. Alors, pour des raisons de degré, les seuls éléments non nuls de degré total $s+1$ de ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_\infty(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$ sont sur la ligne 0. Le produit de chacun de ces éléments par e dans le module

$${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_\infty(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)}) = {}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_2(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_F^{\bullet(k)})$$

est non nul. Ainsi, le produit $f_1^{(k)} \cdot e$ est aussi non nul dans l'aboutissement $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)})$. Cette extension est exactement égale à $f_1 \boxtimes f_2$, par définition. Cela prouve l'injectivité de (9), puis la bijectivité.

Il en va exactement de même pour $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$, en utilisant le lemme 4.1 ci-dessous.

LEMME 4.1 ([3]) *Soit F un objet de $\mathcal{P}$, homogène de degré p^h. Le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$$

induit par le foncteur exact $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ consistant à oublier la structure strictement polynomiale est une injection.

Références

[1] H. CARTAN, *Algèbre d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, Séminaire Cartan 1954/55.

[2] H. CARTAN ET S. EILENBERG , *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] V. FRANJOU, E. FRIEDLANDER , A. SCORICHENKO ET A. SUSLIN , *General linear and functor cohomology over finite fields*, Ann. of Math. **150** (1999), no. 2, 663–728.

[4] V. FRANJOU, J. LANNES ET L. SCHWARTZ, *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis*, Invent. Math. **115** (1994), 513–538.

[5] E. FRIEDLANDER ET A. SUSLIN , *Cohomology of finite group schemes over a field*, Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 209–270.

[6] H.-W. HENN, J. LANNES ET L. SCHWARTZ, *Analytic functors, unstable algebras and cohomology of classifying spaces*, Alg. Top. Proc. **96** (1989), 197–220, Northwestern University, Cont.

[7] M. JIBLADZE ET T. PIRASHVILI, *Cohomology of algebraic theories*, J. of algebra **137** (1991), 253–296.

[8] L. SCHWARTZ, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, The Univ. of Chicago Press, 1994.

[9] B. TOTARO, *Projective resolutions of representations of $GL(n)$*, J. Reine Angew. Math. **482** (1997), 1–13.

[10] A. TROESCH, *Cohomologie de compositions de puissances symétriques*, CR Acad. Sci. Paris **333** (2001), 509–512.

[11] A. TROESCH, *Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques*, Comm. in Algebra (A paraître).

[12] A. Troesch, *Cohomologie de compositions de puissances symétriques en caractéristique 2*, Prépublication du LAGA (Paris 13), no. 2002-12.

[13] Ch. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in andvanced mathematics, vol. 38, Cambridge Univ. Press, 1994.

LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13
99, avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse
France
e-mail : `troesch@math.univ-paris13.fr`