Une formule pour la cohomologie de foncteurs composés

Alain Troesch*

Résumé

Soit p un nombre premier. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs des espaces vectoriels finis sur $\mathbb{F}_p$ vers tous les espaces vectoriels, et soit Id l'objet de $\mathcal{F}$ correspondant à l'inclusion. Soit F et G deux objets de $\mathcal{F}$. On donne, moyennant quelques conditions sur F et G, une formule permettant de calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$ en fonction de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G)$.

Abstract

Let p be a prime, and let $\mathcal{F}$ be the category of functors from finite $\mathbb{F}_p$-vector spaces to all $\mathbb{F}_p$-vector spaces. The object Id of $\mathcal{F}$ is the inclusion functor. Let F and G be two objects in $\mathcal{F}$. If F and G satisfy suitable conditions, the main result of this paper allows to compute $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$ with the knowledge of $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$ and $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G)$.

Introduction

Soit p un entier premier quelconque, et soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$ vers la catégorie de tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$. Par exemple, le foncteur inclusion Id, les puissances symétriques S^n, les puissances extérieures Λ^n et les puissances divisées Γ^n sont des objets de $\mathcal{F}$. La catégorie $\mathcal{F}$ est abélienne, et a suffisamment d'injectifs. En effet, les foncteurs I_W, définis pour tout espace vectoriel fini W par $I_W(V) = {\mathbb{F}_p}^{\mathrm{Hom}(V,W)}$ forment un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{F}$. Ainsi, on dispose de tous les outils d'algèbre homologique dans $\mathcal{F}$.

La catégorie $\mathcal{F}$ est très liée à la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod (cf [7, 12]). Pour cette raison, elle a fait l'objet de nombreux calculs (co)-homologiques. Par exemple, Franjou, Lannes et Schwartz,

*L'auteur a bénéficié pendant une partie de la réalisation de ce travail d'une bourse pré-doctorale Marie Curie de la Commission Européenne HPMT-CT-2000-00075.

[5] ont calculé les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$. L'auteur a poursuivi dans cette voie en calculant les espaces $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$ (cf [13, 14, 15]). Dans la suite de ces calculs, on propose ici une formule générale pour $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$ en fonction de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$. Pour ce faire, on travaille dans la catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux introduite par Friedlander et Suslin, [6]. C'est la catégorie des "endofoncteurs" de la catégorie des espaces vectoriels finis tels que les morphismes induits sur les flèches soient (formellement) polynomiaux. Il existe un foncteur oubli de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{F}$, consistant à oublier la structure polynomiale. La catégorie $\mathcal{P}$ se scinde en une somme directe de catégories constituées de foncteurs homogènes. Cela rend généralement les calculs plus faciles dans cette catégorie. À part I_W, les exemples cités plus haut dans $\mathcal{F}$ peuvent également être vus comme objets de $\mathcal{P}$. Un objet particulier de $\mathcal{P}$ est le twist de Frobenius Tw consistant à prendre l'identité sur les objets, et la puissance p-ième formelle sur les morphismes. En composant n fois à droite un foncteur F de $\mathcal{P}$ par le twist Tw, on obtient un foncteur noté $F^{(n)}$, dont le degré est p^n fois plus grand que celui de F.

Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin, [4], donnent des critères de comparaison entre les groupes Ext dans la catégorie $\mathcal{F}$ et dans la catégorie $\mathcal{P}$. Dans [14], on propose une comparaison plus complète dans le cas où la première variable est $\mathrm{Id}^{(n)}$. On obtient notamment que si F est un foncteur homogène de degré p^h de $\mathcal{P}$, les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ déterminent entièrement les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$, et réciproquement.

Le résultat principal de cet article est une formule donnant $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$ en fonction de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$. On expose en fait la formule dans la catégorie $\mathcal{P}$. On rappelle que pour tout foncteur T, $\mathrm{Ext}^*(T,T)$ est une algèbre, le produit étant la composition de Yoneda des extensions. De plus, pour tout foncteur F, le produit de Yoneda définit sur $\mathrm{Ext}^*(T,F)$ une structure de module à droite sur l'algèbre $\mathrm{Ext}^*(T,T)$. On dit que c'est un module de Yoneda.

THÉORÈME 1 (THÉORÈMES 7.1 ET 7.3) *Soit F et G deux objets de $\mathcal{P}$, homogènes de degrés respectifs p^h et p^k. On désigne également par F et G leur image dans $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ ont une structure de module de Yoneda* triviale. *Alors, on a un isomorphisme gradué de modules de Yoneda :*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h} \circ S^{p^k}).$$

La structure de module de Yoneda du produit tensoriel provient de la structure de module du troisième facteur.

En application, on montre comment ce théorème permet de contourner une bonne partie des calculs de [15] pour déterminer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$.

1 Catégories de foncteurs - Rappels

Soit p un entier premier quelconque. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$, et $\mathcal{E}^f$ sa sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie. On note $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ dans $\mathcal{E}$. On désigne par $\mathfrak{S}_n$ le n-ième groupe symétrique. Les foncteurs

- n-ième puissance symétrique $S^n : V \mapsto (V^{\otimes n})/\mathfrak{S}_n$;
- n-ième puissance extérieure $\Lambda^n : V \mapsto (V^{\otimes n})/(x\otimes y = -y\otimes x; x\otimes x = 0)$;
- n-ième puissance divisée $\Gamma^n : V \mapsto (V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$

sont des exemples d'objets de $\mathcal{F}$.

Les calculs (co)homologiques dans cette catégorie sont d'un intérêt particulier du fait du lien entre $\mathcal{F}$ et la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_p$.

Cependant, les calculs ne sont pas toujours faciles à effectuer dans $\mathcal{F}$, car les injectifs sont délicats à manipuler, et car on ne dispose pas de notion d'homogénéité. Friedlander et Suslin ont introduit dans [6] une catégorie plus rigide, fortement reliée à la catégorie $\mathcal{F}$, et dans laquelle on dispose d'un système de cogénérateurs injectifs faciles à manipuler, et d'une notion de degré telle que tout objet est somme directe d'objets homogènes.

Définition 1.1 Soit (V, W) un couple d'espaces vectoriels. Un morphisme *strictement polynomial* de V dans W est un objet de $S^*(V^*) \otimes W$. On note $\mathrm{Hom}_{pol}(V, W)$ l'espace des morphismes *strictement* polyomiaux de V vers W :

$$\mathrm{Hom}_{pol}(V, W) = S^*(V^*) \otimes W.$$

Un morphisme strictement polynomial de V vers W est *homogène* de degré d s'il est élément de $S^d(V^*) \otimes W$.

Une application strictement polynomiale de V dans W définit par oubli de la structure polynomiale stricte une application polynomiale au sens usuel de V dans W.

Définition 1.2 Un *foncteur strictement polynomial* P est la donnée de :

- une application des objets de $\mathcal{E}^f$ vers les objets de $\mathcal{E}^f$: $V \mapsto P(V)$;
- une application qui à tout couple (V, W) dans $\mathcal{E}^f$, associe un morphisme strictement polynomial $P_{V,W}$ de

$$\mathrm{Hom}_{pol}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(P(V), P(W)));$$

tels que

- l'application $P_{V,V}$ conserve l'unité : $P_{V,V}(id_V) = id_{P(V)}$;
- les applications $(P_{V,W})$ sont compatibles avec la composition dans le sens usuel.

On dit qu'un foncteur strictement polynomial est *homogène de degré d* si tous les morphismes strictement polynomiaux $P_{V,W}$ sont homogènes de degré d.

On désigne par $\mathcal{P}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux, et les morphismes sont les transformations naturelles dans le sens usuel. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}$ constituée des foncteurs homogènes de degré d est notée $\mathcal{P}_d$. L'oubli de la structure polynomiale *stricte* induit un foncteur oubli

$$U \ : \ \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Ce foncteur oubli n'est pas surjectif. Il est également loin d'être injectif. En effet, dans $\mathcal{P}$, on peut définir un objet $\mathrm{Tw} \in \mathcal{P}_p$, où p est la caractéristique du corps de base. Ce foncteur, appelé *twist de Frobenius*, consiste à prendre l'identité sur les objets, et la puissance p-ième formelle sur les morphismes. Son image par le foncteur oubli est simplement le foncteur inclusion Id. Étant donné un objet F de $\mathcal{P}$, on définit son twist $F^{(1)}$ par

$$F^{(1)} = F \circ \mathrm{Tw},$$

et plus généralement son n-ième twist de Frobenius par

$$F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ \mathrm{Tw}.$$

Si F est homogène de degré d alors $F^{(n)}$ est homogène de degré $p^n d$. De plus, tous les foncteurs $F^{(n)}$ ont même image F par le foncteur oubli.

On décrit maintenant un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}$.

PROPOSITION 1.3 ([6]) *Les foncteurs $S^{i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_s}$, $i_1 + \cdots + i_s = d$, forment un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}_d$.*

Ce système de cogénérateurs injectifs permet de construire dans $\mathcal{P}$ des résolutions injectives particulières, qui donnent, par application du foncteur oubli U des résolutions (non injectives) d'un type particulier dans $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 1.4 Soit F un foncteur dans $\mathcal{P}_d$. On note aussi F son image par le foncteur oubli dans $\mathcal{F}$. Une *S-résolution de F dans $\mathcal{P}$* est une résolution injective de F construite à partir des cogénérateurs injectifs de la proposition 1.3. Une *S-résolution de F dans $\mathcal{F}$* est l'image par U d'une S-résolution dans $\mathcal{P}$. Ce n'est pas une résolution *injective*.

En d'autres termes, une S-résolution d'un foncteur F de $\mathcal{P}_d$ est une résolution dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques de degré total d. Une telle résolution existe toujours. Il convient de remarquer qu'un foncteur F de $\mathcal{F}$, image par le foncteur oubli d'un foncteur homogène (également noté F) de $\mathcal{P}$ admet des S-résolutions de différents degrés, puisque tous les twists $F^{(n)}$ ont pour image F par le foncteur oubli.

Remarque 1.5 Si $F \in \mathcal{F}$ est un foncteur fini (polynomial et à valeurs dans $\mathcal{E}^f$), alors F s'injecte dans une somme directe finie de puissances symétriques (cf [10])

$$F \hookrightarrow \bigoplus S^{\alpha}.$$

Tout foncteur fini admet donc une résolution dont tous les termes sont des sommes directes de puissances symétriques (on n'a même pas besoin de considérer des produits tensoriels). La différence avec le cas d'un foncteur strictement polynomial réside dans le fait que le degré total varie, et peut même ne pas être borné.

Dans la suite de cet article, on sera amené à considérer des suites spectrales d'hypercohomologie de S-résolutions obtenues en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Id}, -)$ à des résolutions injectives de Cartan-Eilenberg. Dans ce but, il est intéressant de connaître les extensions $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, S)$, où S est un foncteur du type décrit dans la proposition 1.3.

Le cas où S est un produit tensoriel non trivial résulte d'un important résultat de Pirashvili.

Théorème 1.6 (Pirashvili, [9]) *Soit F et G deux objets de $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{P}$) tels que $F(0) = 0 = G(0)$. Soit A un foncteur additif (par exemple $A = \mathrm{Id}$ dans $\mathcal{F}$, ou $A = \mathrm{Id}^{(n)}$ dans $\mathcal{P}$). Alors*

$$\mathrm{Ext}^*(A, G \otimes F) = 0.$$

Il existe en fait une version plus générale de ce résultat.

Théorème 1.7 (Pirashvili [11], [1]) *Soit N un bifoncteur de la catégorie $(\mathcal{E}^f)^2$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ tel que $N(V, W) = 0$ si $V = 0$ ou $W = 0$. On note Δ la diagonale de $\mathcal{E}^f$ dans $(\mathcal{E}^f)^2$. Alors, pour tout foncteur additif A,*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(A, N \circ \Delta) = 0.$$

Corollaire 1.8 *Soit F, G et H des foncteurs sans terme constant. Supposons de plus que G et H sont à valeurs dans $\mathcal{E}^f$. Alors :*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F \circ (G \otimes H)) = 0.$$

Si S est juste une puissance symétrique, la connaissance de $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, S)$ provient de calculs de Franjou, Lannes et Schwartz, adaptés ultérieurement dans la catégorie $\mathcal{P}$ par Friedlander et Suslin. Le théorème de Pirashvili exposé plus haut se révèle d'une efficacité redoutable pour parvenir à ce résultat.

Théorème 1.9 ([5, 6]) *L'algèbre unitaire $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ (avec la structure de Yoneda), est engendrée par des représentants $e_\ell \in \mathrm{Ext}^{2p^{\ell-1}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$, pour $\ell > 0$, les seules relations entre ces générateurs étant la commutativité et les relations $e_\ell^p = 0$. Le module de Yoneda $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$ est nul si n n'est pas une puissance de p. Le module de Yoneda $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h})$ est le quotient de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par l'idéal engendré par $e_1, \ldots, e_h$. On en déduit une structure d'algèbre sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h})$.*

En tant qu'algèbre unitaire graduée, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathrm{Id}^{(n)})$ est engendrée par des éléments $e_\ell^{(n-\ell)}$ de $\mathrm{Ext}^{2p^{\ell-1}}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathrm{Id}^{(n)})$, avec $0 < \ell \leqslant n$, soumis uniquement aux relations $\left(e_\ell^{(n-\ell)}\right)^p = 0$, et aux relations de commutativité. Pour h vérifiant $0 \leqslant h \leqslant n$, le module de Yoneda à droite $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, S^{p^h(n-h)})$ est le quotient de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathrm{Id}^{(n)})$ par l'idéal engendré par $e_1^{(n-1)}, \ldots, e_h^{(n-h)}$, d'où une structure d'algèbre sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, S^{p^h(n-h)})$.

Ces résultats ont notamment pour conséquence le théorème suivant, donnant une comparaison complète des groupes Ext dans les catégories $\mathcal{P}$ et $\mathcal{F}$ lorsque la première variable est l'identité.

Théorème 1.10 ([14, 16]) *Soit F un foncteur strictement polynomial homogène de degré p^h. L'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ est nul si $s > 2p^h - 2$. De plus, on a des isomorphismes de modules de Yoneda*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)}) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}, F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h}).$$

On précise, pour pouvoir comprendre cet énoncé, comment pourvoir le produit tensoriel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F^{(k)}). \qquad (1)$$

d'une structure de module sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$.

Soit A et A' deux $\mathbb{F}_p$-algèbres graduées. Suivant [2], on obtient une structure d'algèbre sur $A \otimes_{\mathbb{F}_p} A'$ en définissant le produit d'éléments homogènes par

$$(a \otimes a') \cdot (b \otimes b') = (-1)^{kh}(ab) \otimes (a'b'),$$

où k est le degré de a' et h est le degré de b. Soit ensuite M et M' deux modules (à droite) gradués, respectivement sur A et sur A'. Toujours suivant [2], on construit sur $M \otimes_{\mathbb{F}_p} M'$ une structure de module (à droite) gradué sur l'algèbre $A \otimes A'$ en posant, pour des éléments homogènes,

$$(a \otimes a') \cdot (m \otimes m') = (-1)^{kh}(am) \otimes (a'm'),$$

où k est le degré de a', et h celui de m.

Remarquons maintenant que l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ est isomorphe, avec les définitions ci-dessus, au produit tensoriel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)}) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)}) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)}). \quad (2)$$

Comme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ est un module sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, \mathrm{Id}^{(h)})$, et que l'algèbre $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h(k)})$ est de manière triviale un module sur elle-même, on en déduit, d'après la construction ci-dessus et l'égalité (2) une structure de module sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ pour le produit tensoriel (1). C'est cette structure que l'on considère dans le théorème 1.10. Il en est de même pour le deuxième isomorphisme. On remarquera que comme les algèbres considérées sont concentrées en degrés pairs, les signes apparaissant dans les formules ci-dessus sont dans ce cas toujours positifs.

Dans l'optique d'étudier des groupes d'extensions dont la seconde variable est une composition de foncteurs, il est intéressant de pouvoir contrôler l'évolution de l'homologie d'un complexe lorsqu'on le compose par un foncteur P. Le cas d'une composition à droite (précomposition) est facile, puisque la précomposition est exacte. Le cas de la composition à gauche est plus délicat, car on n'a pas l'exactitude dans ce cas. Cependant dans le cadre d'étude d'extensions dont la première variable est un foncteur additif, par exemple Id dans la catégorie $\mathcal{F}$, tout se passe comme si la postcomposition était exacte, ainsi que l'exprime le théorème suivant.

Théorème 1.11 ([14]) *Soit P un foncteur polynomial dans $\mathcal{F}$, et $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe d'objets de $\overline{\mathcal{F}}^f$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$:*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, H_n(P(\mathcal{C}^\bullet))) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, P(H_n(\mathcal{C}^\bullet))).$$

Pour clore cette partie de rappels, on remémore certaines définitions et notations concernant les suites spectrales d'hypercohomologie d'un complexe $\mathcal{C}^\bullet$ dans une catégorie $\mathcal{B}$ ayant suffisamment d'injectifs, par exemple $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ ou $\mathcal{B} = \mathcal{P}$. Pour plus de détails, on pourra consulter [3, 17]. Soit $I^{\bullet\bullet}$ une résolution de Cartan-Eilenberg de $\mathcal{C}^\bullet$. L'indexation est prise de sorte que pour tout n, $I^{n,\bullet}$ soit une résolution injective de $\mathcal{C}^\bullet$. Soit T un objet quelconque de $\mathcal{B}$. Le complexe double $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T, I^{\bullet\bullet})$ peut être filtré soit suivant les colonnes, soit suivant les lignes. Cela fournit deux suites spectrales, appelées première et seconde suites spectrales d'hypercohomologie, et notées respectivement ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{I}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ et ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{II}(T, \mathcal{C}^\bullet)$.

RÉSULTAT 1.12 *Les deux suites spectrales d'hypercohomologie d'un complexe $\mathcal{C}^\bullet$ sont données en petits rangs par*

- ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{I}_1^{s,t}(T, \mathcal{C}^\bullet) = \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{B}}(T, \mathcal{C}^s)$ *;*
- ${}_{\mathcal{B}}\mathbf{II}_2^{s,t}(T, \mathcal{C}^\bullet) = \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{B}}(T, H^t(\mathcal{C}^\bullet))$.

Les aboutissements de ces deux suites spectrales sont des gradués d'un même objet $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{B}}(T, \mathcal{C}^\bullet)$. *Dans les conventions d'indexation utilisées ici, les différentielles de rang r sont de bidegré $(r, 1-r)$.*

Lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité, on omettra la référence à la catégorie ambiante en écrivant simplement $\mathbf{I}(T, \mathcal{C}^\bullet)$ et $\mathbf{II}(T, \mathcal{C}^\bullet)$.

Par convention, étant donné deux foncteurs F et G de $\mathcal{P}$, homogènes de degré p^h et p^k, on désignera de manière générique par $\mathrm{Ext}^*(F, G)$ les modules d'extensions, vu indifféremment dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$; plus précisémment, cette écriture désignera dans $\mathcal{P}$ tous les modules $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(F^{(r-h)}, G^{(r-k)})$. On utilisera cette notation lorsqu'on ne veut pas préciser la catégorie dans laquelle on se place, ou le nombre de twists.

2 Le résultat principal - Premiers pas

Le problème que l'on aimerait résoudre est le suivant :

PROBLÈME 2.1 *Soit F et G deux objets homogènes de $\mathcal{P}$. Existe-t-il une relation permettant de déterminer le module de Yoneda* $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, G \circ F)$ *en fonction des modules* $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, F)$ *et* $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, G)$ *?*

On propose une solution à ce problème dans le cas particulier où les structures de modules de Yoneda de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ sont triviales. On montre dans ce cas que si F et G sont homogènes respectivement de degré p^h et p^k, alors il existe des isomorphismes, en tant que modules de Yoneda (théorème 7.1) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+\ell)},(G\circ F)^{(\ell)})\cong\\&\quad\cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)},F)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)},G)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+\ell)},(S^{p^k}\circ S^{p^h})^{(\ell)}),\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id},G\circ F)\cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)},F)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)},G)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id},S^{p^k}\circ S^{p^h}).$$

Remarque 2.2 L'action de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+\ell)},\mathrm{Id}^{(h+k+\ell)})$ considérée sur le produit tensoriel du premier isomorphisme est l'action sur le troisième terme du produit tensoriel. Ainsi, le module obtenu est une juxtaposition de suspensions du module de Yoneda $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+\ell)},(S^{p^k}\circ S^{p^h})^{(\ell)})$. De même pour l'action de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ sur le produit tensoriel du second isomorphisme.

On expose brièvement l'idée qui permet d'obtenir les isomorphismes cidessus. Soit $\mathcal{R}^\bullet_G$ une S-résolution de degré p^k de G. Le complexe

$$\mathcal{R}^\bullet_G\circ F\ :\ \mathcal{R}^0_G\circ F\to\mathcal{R}^1_G\circ F\to\cdots\to\mathcal{R}^n_G\circ F\to\cdots$$

est une résolution (bien sûr ni S- ni injective) de $G\circ F$.

D'après 1.12, les suites spectrales d'hypercohomologie du complexe $\mathcal{R}^\bullet_G\circ F$ relativement au foncteur $\mathrm{Id}^{(k)}$ sont initialisées par

$$\begin{cases}{}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}^{s,t}_1(\mathrm{Id}^{(h+k)},\mathcal{R}^\bullet_G\circ F)=\mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)},\mathcal{R}^s_G\circ F),\\ {}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}^{s,0}_2(\mathrm{Id}^{(h+k)},\mathcal{R}^\bullet_G\circ F)=\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)},G\circ F),\\ {}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}^{s,t}_2(\mathrm{Id}^{(h+k)},\mathcal{R}^\bullet_G\circ F)=0 \text{ si } t>0.\end{cases}$$

La seconde suite spectrale dégénère au rang 2, puisqu'elle n'a qu'une ligne non nulle. L'aboutissement des deux suites spectrales est donc égal au module que l'on cherche à calculer, $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)},G\circ S^{p^h})$.

De plus, chaque terme $\mathcal{R}^s_G$ se décompose en une somme directe de produits tensoriels de puissances symétriques, puisqu'il s'agit d'une S-résolution. On se donne explicitement une telle résolution :

$$\mathcal{R}^s_G=\bigoplus_{\alpha\in A_s}S_\alpha,$$

où les A_s sont des ensembles d'indices deux à deux distincts, et où S_α est un foncteur du type défini dans la proposition 1.3. Alors,

$${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}^{s,t}_1(\mathrm{Id}^{(h+k)},\mathcal{R}^\bullet_G\circ F)=\bigoplus_{\alpha\in A_s}\mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)},S_\alpha\circ F).\tag{3}$$

Par définition, S^α est égal à $S^{i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_\ell}$, pour un certain choix de ℓ et de $i_1, \ldots, i_\ell$ tels que $i_1 + \cdots + i_\ell = p^k$. Si $\ell \geqslant 2$, la contribution de S_α dans l'expression (3) est nulle d'après le théorème 1.6. Ainsi,

$$_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_1^{s,t}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_G^\bullet \circ F) = \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)^{\oplus m_s}, \tag{4}$$

où m_s est le nombre de facteurs S_α de $\mathcal{R}_G^s$ égaux à S^{p^k} dans la décomposition qu'on s'est donnée. On montre dans la section suivante qu'on peut choisir la décomposition de sorte que

$$m_s = \dim \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G).$$

Ainsi, l'expression (4) signifie exactement qu'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels bigradués

$$_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_1^{*_1,*_2}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_G^\bullet \circ F) = \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F).$$

Par conséquent, si la suite spectrale dégénère au rang 2, alors on obtient l'isomorphime suivant entre espaces vectoriels gradués :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F).$$

Soit maintenant de même $\mathcal{R}_F^\bullet$ une S-résolution de F. En la composant *à gauche* par S^{p^k} et en utilisant le théorème 1.11, on obtient de même

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ S^{p^h}),$$

à condition que la suite spectrale $_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ \mathcal{R}_F^\bullet)$ *dégénère au rang 2.*

Les seules hypothèses de départ étant la trivialité des structure de module de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$, il s'agit relier les actions sur ces deux modules aux différentielles des suites spectrales ci-dessus.

La suite de l'article consiste donc dans un premier temps à définir une notion de S-résolution réduite, ce qui permet de simplifier grandement les raisonnements ; ensuite, pour une décomposition particulière d'une S-résolution, on définit son graphe, puis le graphe engendré par un ensemble de composantes de la décomposition. Onn exprime alors l'existence d'actions dans $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ par une propriété sur les graphes engendrés par certains ensembles de composantes. On termine la preuve de la formule annoncée en reliant cette propriété à l'existence de différentielles dans les suites spectrales considérées ci-dessus.

3 S-résolutions réduites

Dans cette partie, on montre comment construire des S-résolution particulières ayant un nombre minimal de facteurs S^{p^k}. Les méthodes pour y parvenir sont classiques, dans le sens où on n'utilise que des résultats basiques d'algèbre homologique. Le seul point original que nous utilisons est la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)})$.

Soit G un foncteur strictement polynomial homogène de degré p^k. On appellera S-résolution Id-*réduite*, ou simplement *réduite* une S-résolution $\mathcal{R}_G^\bullet$ telle que le nombre de facteurs S^{p^k} dans $\mathcal{R}_G^s$ soit exactement égal à la dimension de $\mathrm{Ext}^s(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. Il est clair qu'on ne peut pas faire mieux, à cause du théorème de Pirashvili. Une définition équivalente est de dire que $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^\bullet)$ dégénère *au rang* 1.

L'objet des lemmes 3.1, 3.2 et 3.3 est de montrer que tout foncteur admet au moins une S-résolution réduite.

LEMME 3.1 *Soit G un objet de $\mathcal{P}_{p^k}$ tel que* $\dim \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) = 0$. *Alors G s'injecte dans une somme de produits tensoriels* non triviaux *de puissances symétriques.*

Démonstration.

Soit $\mathcal{R}_G^\bullet$ une S-résolution de G, et soit, pour tout $s \geqslant 0$,

$$\mathcal{R}_G^s = (S^{p^k})^{\oplus m_s} \oplus \overline{\mathcal{R}}_G^s,$$

où $\overline{\mathcal{R}}_G^s$ est une somme directe de produits tensoriels *non triviaux* de puissances symétriques.

La première suite spectrale d'hypercohomologie ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^\bullet)$ converge vers $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. De plus, puisque $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, S^{p^k})$ n'est non nul qu'en degré 0, seule la ligne d'ordonnée 0 de ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^\bullet)$ est non nulle, et

$$\dim {}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_1^{s,0}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^\bullet) = m_s$$

Ainsi, afin que l'aboutissement en degré total 0 soit 0, la différentielle d_1 est une injection entre les deux premières colonnes :

$$d_1 \ : \ \mathbf{I}_1^{0,0}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \hookrightarrow \mathbf{I}_1^{1,0}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$$

Puisque les seuls endomorphismes de S^{p^k} sont les multiples de l'identité, cela implique que la composition

$$(S^{p^k})^{\oplus m_0} \xrightarrow{incl} \mathcal{R}_G^0 \longrightarrow \mathcal{R}_G^1 \xrightarrow{proj} (S^{p^k})^{\oplus m_1}$$

est une injection. Soit maintenant K le noyau de la composition

$$K \hookrightarrow \left(G \hookrightarrow \mathcal{R}_G^0 \xrightarrow{proj} \overline{\mathcal{R}}_G^0\right).$$

Alors, $K \hookrightarrow \mathcal{R}_G^0 = \mathcal{R} = (S^{p^k})^{\oplus m_0} \oplus \overline{\mathcal{R}}_G^0$ est une injection, et est nulle sur la composante $\overline{\mathcal{R}}_G^s$. Donc $K \to (S^{p^k})^{\oplus m_0}$ est une inclusion, puis également la composition

$$K \hookrightarrow (S^{p^k})^{\oplus m_0} \hookrightarrow (S^{p^k})^{\oplus m_1}.$$

Or, c'est le morphisme nul, à cause du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[drr] & G \arrow[r] & (S^{p^k})^{\oplus m_0} \oplus \overline{\mathcal{R}}_G^0 \arrow[r] \arrow[d, "proj."] & (S^{p^k})^{\oplus m_1} \oplus \overline{\mathcal{R}}_G^1 \arrow[d, "proj."] \\
 & & (S^{p^k})^{\oplus m_0} \arrow[r] & (S^{p^k})^{\oplus m_1}
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, $K = 0$, et le morphisme $G \to \overline{\mathcal{R}}_G^0$ est une injection telle qu'on voulait en trouver une. □

Lemme 3.2 *Soit G un objet de $\mathcal{P}_{p^k}$. Il existe une injection*

$$G \hookrightarrow (S^{p^k})^{\oplus n_0} \oplus \overline{\mathcal{R}}_G^0,$$

où n_0 est égal à la dimension de $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$, et $\overline{\mathcal{R}}_G^0$ est une somme directe de produits tensoriels non triviaux de puissances symétriques.

Démonstration.

Là encore, la preuve relève de résultats basiques d'algèbre homologique. Cependant, on utilise un ingrédient particulier à cette situation, qui est la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)})$.

On opère par récurrence sur la dimension n_0 de $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$, c'est-à-dire de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. Si $n_0 = 0$, c'est le lemme précédent. Supposons que $n_0 > 0$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ n'est pas réduit à 0. En particulier, il existe un morphisme non nul $\mathrm{Id}^{(k)} \to G$. Son noyau en tant que morphisme dans $\mathcal{F}$ est nul, car il n'est pas égal à Id, et $\mathrm{Id} = \Lambda^1$ est un objet simple dans $\mathcal{F}$. Ainsi, le morphisme $\mathrm{Id}^{(k)} \to G$ est injectif. Soit C son conoyau. On obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Id}^{(k)} \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5}$$

Puisque $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)}) = 0$, la suite exacte longue obtenue en appliquant $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, -)$ fournit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, C) \longrightarrow 0.$$

La dimension de $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, C)$ est donc $n_0 - 1$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à C. Il existe donc une injection

$$C \hookrightarrow (S^{p^k})^{\oplus(n_0-1)} \oplus \overline{\mathcal{R}}^0_C,$$

où $\overline{\mathcal{R}}^0_C$ est une somme directe de produits tensoriels non triviaux de puissances symétriques. De même, on a une injection $\mathrm{Id}^{(k)} \hookrightarrow S^{p^k}$. Par conséquent, les S-résolutions étant des résolutions *injectives* dans $\mathcal{P}$, on obtient une injection

$$G \hookrightarrow S^{p^k} \oplus (S^{p^k})^{\oplus(n_0-1)} \oplus \overline{\mathcal{R}}^0_C,$$

par une construction classique d'algèbre homologique (construction d'une résolution injective du terme central d'une suite exacte courte à partir de résolutions injectives des deux autres termes, [3]). C'est bien le résultat escompté. $\square$

LEMME 3.3 *Tout foncteur G de $\mathcal{P}_{p^k}$ admet au moins une résolution réduite, c'est-à-dire une résolution*

$$G \longrightarrow (S^{p^k})^{\oplus n_0} \oplus \overline{\mathcal{R}}^0_G \longrightarrow (S^{p^k})^{\oplus n_1} \oplus \overline{\mathcal{R}}^1_G \longrightarrow \cdots,$$

où, pour tout $s \geqslant 0$, n_s est la dimension de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, G)$, et $\overline{\mathcal{R}}^s_G$ est une somme directe de produits tensoriels non triviaux de puissances symétriques.

Démonstration.

On construit la résolution pas à pas, de la même manière qu'on construit une résolution injective sachant qu'il y a suffisamment d'injectifs. Le seul point à vérifier est le transport des conditions de minimalité d'une étape à la suivante.

Supposons construits $\mathcal{R}^0_G, \ldots, \mathcal{R}^s_G$. Soit C^s le conoyau du morphisme

$$\mathcal{R}^{s-1}_G \longrightarrow \mathcal{R}^s_G.$$

On a posé $\mathcal{R}^{-1}_G = G$, si $s = 0$. D'après le lemme 3.2, on peut trouver un foncteur $\mathcal{R}^{s+1}_G$ s'écrivant comme une somme directe de produits tensoriels de puissances symétriques, et ayant un nombre de facteurs S^{p^k} égal à la dimension de $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, C^s)$, et une injection

$$C^s \hookrightarrow \mathcal{R}^{s+1}_G.$$

Alors,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] & \mathcal{R}_G^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}_G^s \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{R}_G^{s+1} \\
& & & & C^s \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

est le début d'une résolution réduite de G. L'exactitude en $\mathcal{R}_G^s$ est claire. Il suffit de vérifier que le nombre de facteurs égaux à S^{p^k} dans $\mathcal{R}_G^{s+1}$ est égal à la dimension de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s+1}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s+1}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^s),$$

Il suffit pour cela de montrer que si pour tout $-1 \leqslant t \leqslant s$, C^t désigne le conoyau de $\mathcal{R}_G^{t-1} \to \mathcal{R}_G^t$ si $t \geqslant 0$, et $C^{-1} = G$, alors, pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant s$, on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{*}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^t) = \begin{cases} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{*+1}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^{t-1}) & \text{si } * \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

En effet, pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant s$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C^{t-1} \longrightarrow \mathcal{R}_G^t \longrightarrow C^t \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{R}_G^t$ est injectif, la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Id}^{(k)}, -)$ donne des suites exactes

$$\begin{multline} 0 \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^{t-1}) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^t) \to \\ \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^{t}) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{1}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^{t-1}) \to 0 \end{multline} \tag{7}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{m}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^t) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{m+1}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^{t-1}) \longrightarrow 0, \text{ pour tout } m > 0. \tag{8}$$

Les équations (8) fournissent (6) pour $* > 0$. Le cas de $* = 0$ provient de (7) et du fait que par construction,

$$\dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0}(\mathrm{Id}^{(k)}, C^{t-1}) = \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^t).$$

□

4 Graphe d'une S-résolution explicite

Définition 4.1 On appelle S-résolution *explicite* de G la donnée d'une S-résolution de G, et d'une décomposition explicite des foncteurs $\mathcal{R}_G^s$ en somme directe de produits tensoriels de puissances symétriques.

Dans tout ce qui suit, on se fixe G un foncteur homogène de degré p^k, et $\mathcal{R}_G^\bullet$ une S-résolution *explicite réduite* de G, munie d'une décomposition

$$\mathcal{R}_F^\ell = \bigoplus_{\alpha=1}^{\alpha_\ell} S^{\ell,\alpha}, \tag{9}$$

de chacun de ses termes, où $S^{\ell,\alpha}$ est un produit tensoriel de puissances symétriques, de degré total p^k.

Terminologie 4.2 *Un terme $S^{\ell,\alpha}$ apparaissant dans la décomposition (9) de $\mathcal{R}_F^\ell$ est appelé* facteur élémentaire *de degré (cohomologique) ℓ de la S-résolution réduite $\mathcal{R}_F^\bullet$.*

Pour continuer, nous avons besoin de quelques notions combinatoires concernant la résolution $\mathcal{R}_G^\bullet$.

Définition 4.3 Le *graphe de la S-résolution $\mathcal{R}_G^\bullet$* est le graphe orienté $\Gamma(\mathcal{R}_G^\bullet)$ tel que :
- les sommets sont les facteurs élémentaires de la résolution $\mathcal{R}_G^\bullet$;
- il existe une flèche du sommet $S^{\ell,\alpha}$ vers le sommet $S^{m,\beta}$ si et seulement si $m = \ell+1$ et si la restriction de la différentielle de $\mathcal{R}_G^\bullet$ sur ces facteurs est non nulle :

$$\begin{tikzcd} S^{\ell,\alpha} \arrow[r, tail] \arrow[rrr, bend right, "\neq 0"'] & \mathcal{R}_F^k \arrow[r, "d"] & \mathcal{R}_F^{k+1} \arrow[r, two heads] & S^{m,\beta} \end{tikzcd}$$

Exemple 4.4 Dans [6], Friedlander et Suslin construisent une S-résolution réduite de $S^{m(r)}$ en caractéristique 2. On décrit ici la résolution qu'ils obtiennent pour $\mathrm{Id}^{(2)}$. On introduit la notation

$$\boxed{\begin{matrix} S^{m_2} & S^{m_3} \\ S^{m_0} & S^{m_1} \end{matrix}}$$

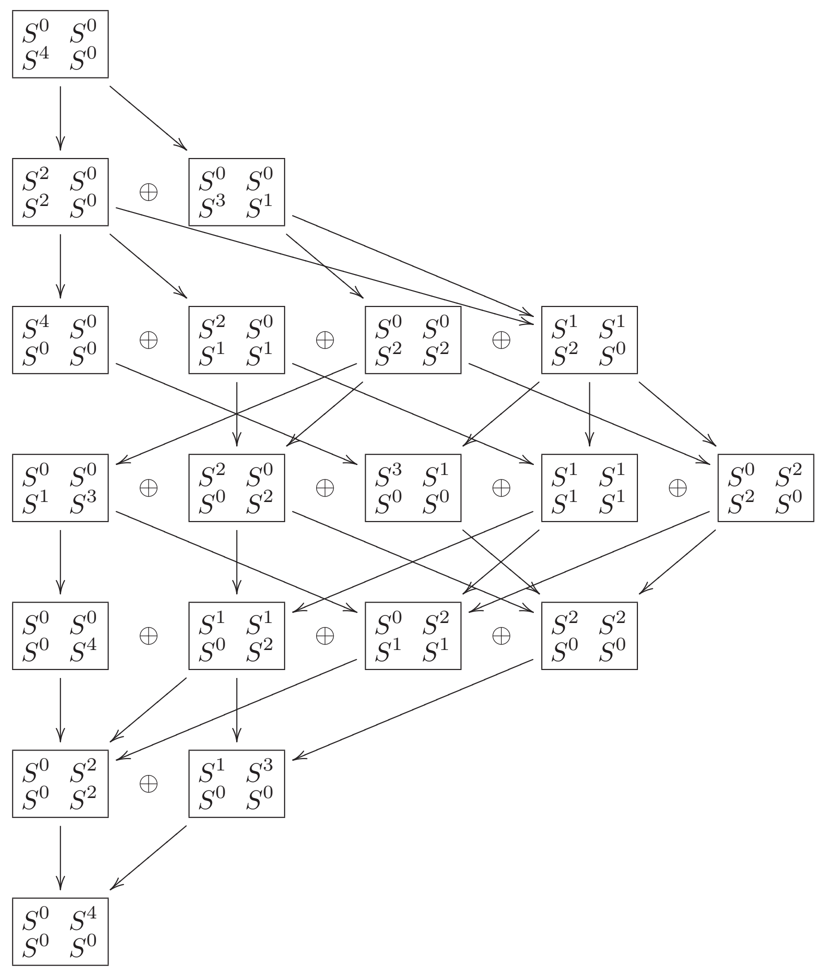

FIG. 1 – *Une S-résolution réduite de* $\mathrm{Id}^{(2)}$

pour désigner le produit tensoriel $S^{m_0} \otimes S^{m_1} \otimes S^{m_2} \otimes S^{m_3}$. On définit des morphismes

$$d_0^h \ : \ \boxed{\begin{matrix} S^{m_2} & S^{m_3} \\ S^{m_0} & S^{m_1} \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} S^{m_2} & S^{m_3} \\ S^{m_0-1} & S^{m_1+1} \end{matrix}}$$

et de même d_1^h consistant à faire passer un degré de la gauche vers la droite sur la ligne supérieure, puis

$$d_0^v \ : \ \boxed{\begin{array}{cc} S^{m_2} & S^{m_3} \\ S^{m_0} & S^{m_1} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} S^{m_2+2} & S^{m_3} \\ S^{m_0-2} & S^{m_1+1} \end{array}}$$

et de même d_1^v consistant à faire passer *deux* degrés de bas en haut sur la colonne de droite. Les morphismes d_i^h et d_i^v sont induits respectivement par les morphismes

$$\begin{array}{rcl} S^i \otimes S^j & \longrightarrow & S^{i-1} \otimes S^{j+1} \\ x_1 \cdots x_i \otimes y_1 \cdots y_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{i} x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_i \otimes x_k \cdot y_1 \cdots y_j \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} S^i \otimes S^j & \longrightarrow & S^{i-2} \otimes S^{j+2} \\ x_1 \cdots x_i \otimes y_1 \cdots y_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant j} x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots \widehat{x_\ell} \cdots x_i \otimes x_k \cdot x_\ell \cdot y_1 \cdots y_j \end{array}$$

Ces morphismes permettent de définir la résolution $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(2)}}$ de $\mathrm{Id}^{(2)}$ décrite dans la figure 1. Toutes les flèches représentées dans cette figure sont du type défini ci-dessus, et sont non nulles. En oubliant les symboles $\oplus$, on obtient donc le graphe $\Gamma(\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(2)}})$ de la résolution $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(2)}}$.

Cette présentation "bidimentionnelle" de la construction de Friedlander et Suslin s'étend à une construction n-dimensionnelle (n correpondant au degré du twist). Les morphismes consistent à pousser 2^s éléments d'un facteur situé sur la face 0 pour la s-ième coordonnée dans le facteur correspondant sur la face 1. Ainsi, on arrive à visualiser plus facilement la présentation "linéaire" de Friedlander et Suslin.

Définition 4.5 Soit V un ensemble de sommets de $\Gamma(\mathcal{R}^\bullet_G)$. Le *graphe engendré par* V est le plus petit sous-graphe plein $\Gamma(V)$ de $\Gamma(\mathcal{R}^\bullet_G)$ qui contient les sommets contenus dans V et qui vérifie la propriété suivante : pour tout sommet v de $\Gamma(V)$ et toute arête $v \to w$ de $\Gamma(\mathcal{R}^\bullet_G)$, le sommet w de $\Gamma(\mathcal{R}^\bullet_G)$ est encore un sommet de $\Gamma(V)$.

Exemple 4.6 On donne dans la figure 2 les graphes engendrés (séparément) par les facteurs élémentaires $\boxed{\begin{array}{cc} S^0 & S^4 \\ S^0 & S^0 \end{array}}$ en degré 2 et $\boxed{\begin{array}{cc} S^0 & S^2 \\ S^2 & S^0 \end{array}}$ en degré 3 de la résolution $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(2)}}$ décrite dans la figure 1, puis le graphe engendré par l'ensemble $\left\{ \boxed{\begin{array}{cc} S^0 & S^4 \\ S^0 & S^0 \end{array}} ; \boxed{\begin{array}{cc} S^0 & S^2 \\ S^2 & S^0 \end{array}} \right\}$ constitué de ces deux facteurs.

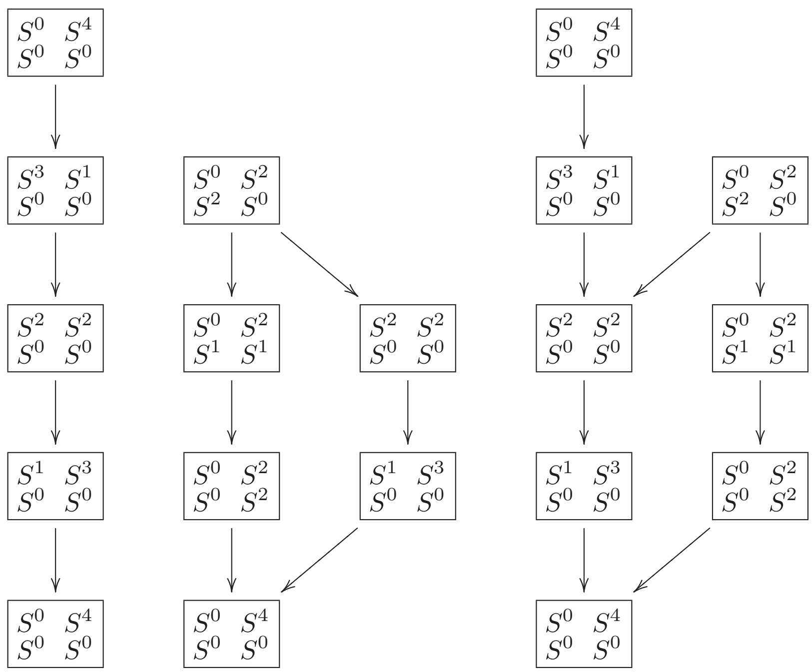

FIG. 2 – *Graphes engendrés par* $\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^4 \\ S^0 & S^0 \end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^2 \\ S^2 & S^0 \end{matrix}}$ *et* $\left\{\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^4 \\ S^0 & S^0 \end{matrix}};\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^2 \\ S^2 & S^0 \end{matrix}}\right\}$

NOTATION 4.7 On note $\Gamma(S,n)$ l'ensemble des sommets de $\Gamma(S)$ de degré n.

EXEMPLE 4.8 Pour l'exemple 4.4, d'après la figure 2, on obtient :

$$\Gamma\left(\left\{\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^4 \\ S^0 & S^0 \end{matrix}};\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^2 \\ S^2 & S^0 \end{matrix}}\right\},4\right) = \left\{\boxed{\begin{matrix} S^2 & S^2 \\ S^0 & S^0 \end{matrix}};\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^2 \\ S^1 & S^1 \end{matrix}}\right\}$$

NOTATION 4.9 Soit, pour un sous-ensemble V de sommets de $\Gamma(\mathcal{R}_G^\bullet, s)$, $\mathcal{R}_G^\bullet(V)$ le complexe défini par

$$\mathcal{R}_G^t(V) = \bigoplus_{v\in\Gamma(V,t)} v.$$

Sa différentielle est la restriction de celle de $\mathcal{R}_G^\bullet$. Par construction de $\Gamma(V,t)$, l'inclusion de chacun des termes $\mathcal{R}_G^t(V) \to \mathcal{R}_G^t$ définit un morphisme de complexe $\mathcal{R}_G^\bullet(V) \to \mathcal{R}_G^\bullet$: le complexe $\mathcal{R}_G^\bullet(V)$ est un sous-complexe de $\mathcal{R}_G^\bullet$.

Si $V = \{v\}$ est réduit à un élément, on s'autorisera à écrire $\mathcal{R}_G^\bullet(v)$ à la place de $\mathcal{R}_G^\bullet(\{v\})$.

EXEMPLE 4.10 Dans l'exemple 4.4, le complexe $\mathcal{R}_G^\bullet\left(\boxed{\begin{matrix} S^0 & S^4 \\ S^0 & S^0 \end{matrix}}\right)$ est donné par

$$S^4 \longrightarrow S^3 \otimes S^1 \longrightarrow S^2 \otimes S^2 \longrightarrow S^1 \otimes S^3 \longrightarrow S^4,$$

le premier terme étant en degré 2.

5 Graphes et actions de Yoneda

L'avantage essentiel des S-résolutions réduites est qu'il est facile de contruire explicitement des représentants $\mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}_G^s$ formant une base de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$.

On se donne G un foncteur strictement polynomial homogène de degré p^k, et $\mathcal{R}_G^\bullet$ une S-résolution réduite explicite de G.

LEMME 5.1 *Soit $v = S^{p^k}$ un facteur élémentaire en degré s de la S-résolution explicite $\mathcal{R}_G^\bullet$. Soit φ_v le morphisme $\mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}_G^s$ tel que φ_v est le morphisme de Frobenius*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Id}^{(k)} & \longrightarrow & S^{p^k} \\ x^{(k)} & \longmapsto & x^{p^k} \end{array}$$

sur le facteur $v = S^{p^k}$, et est nul sur les autres facteurs. Alors le morphisme φ est le représentant d'une classe d'extension dans $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. De plus l'ensemble des classes d'extensions $[\varphi_v]$ ainsi obtenues avec tous les facteurs élémentaires v sans produit tensoriel (i.e. égaux à S^{p^k}) de $\mathcal{R}_G^s$ est une base de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$.

Démonstration.

Le morphisme φ_v est le représentant d'une classe d'extensions. Il faut montrer pour cela que la composée

$$\mathrm{Id}^{(n)} \xrightarrow{\varphi_v} \mathcal{R}_G^s \longrightarrow \mathcal{R}_G^{s+1}$$

est nulle, c'est-à-dire que la composée

$$\mathrm{Id}^{(n)} \xrightarrow{(-)^{p^k}} S^{p^k} \longrightarrow \mathcal{R}_G^{s+1}$$

est nulle. Cela résulte des deux points suivants :

– les groupes $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(n)}, S^{i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_k})$ sont nuls sauf si le terme de droite n'est constitué que d'un facteur, c'est-à-dire est égal à S^{p^k} ;
– les projections du morphisme $S^{p^k}_m \longrightarrow \mathcal{R}^{s+1}_G$ sur les facteurs élémentaires de $\mathcal{R}^{s+1}_G$ égaux à S^{p^k} sont nulles. En effet, si ce n'était pas le cas, la différentielle d_1 de la suite spectrale $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(n)}, \mathcal{R}^\bullet_G)$ serait non nulle, ce qui contredit la minimalité de la construction de $\mathcal{R}^\bullet_G$.

Les morphismes φ_v obtenu pour tous les facteurs élémentaires $v = S^{p^k}$ en degré s sont clairement linéairement indépendants. Ils forment une base de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ pour des raisons évidentes de dimension. □

Terminologie 5.2 *On parlera de la classe d'extension représentée par le facteur élémentaire $v = S^{p^k}$ pour désigner la classe représentée par le morphisme φ_v.*

Proposition 5.3 *Soit e un élément de $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)})$, et $v = S^{p^k}$ un facteur élémentaire d'une S-résolution réduite explicite $\mathcal{R}^\bullet_G$ de G, représentant une extension $f \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. Si les sommets de $\Gamma(\{v\}, s+i)$ sont tous des produits tensoriels non triviaux, c'est-à-dire sont différents de S^{p^k}, alors le produit de Yoneda $f \cdot e$ est nul.*

Démonstration.

On note $\varphi : \mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}^s_G$ le représentant de l'extension f défini dans le lemme 5.1 à partir du facteur élémentaire v. La construction d'un représentant $(\psi : \mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}^{s+i}_F)$ de $f \cdot e$ est donnée comme suit. Soit $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ une résolution injective de $\mathrm{Id}^{(k)}$. On peut la choisir telle que $\mathcal{R}^0_{\mathrm{Id}^{(k)}} = S^{p^k}$. Puisque $\mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ est acyclique et $G \to \mathcal{R}^\bullet_G$ est une résolution *injective* de G, il existe un morphisme de complexes

$$\mathcal{R}^{\bullet - s}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet_G$$

tel que la composition

$$\mathrm{Id}^{(k)} \longrightarrow \mathcal{R}^0_{\mathrm{Id}^{(k)}} \longrightarrow \mathcal{R}^s_G$$

soit égale à φ. Soit $\xi : \mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ un représentant de e. On obtient le diagramme commutatif de la figure 3.

Alors, l'extension $f \cdot e$ est représentée par le morphisme ψ obtenu par la composition

$$\psi : \mathrm{Id}^{(k)} \xrightarrow{\xi} \mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(k)}} \longrightarrow \mathcal{R}^{s+i}_G.$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Id}^{(k)} \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\varphi"'] & & & \mathrm{Id}^{(k)} \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dd, bend left, dotted] & & \\
& S^{p^k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}^1_{\mathrm{Id}^{(k)}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(k)}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}^{i+1}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathcal{R}^{s-1}_G \arrow[r] & \mathcal{R}^s_G \arrow[r] & \mathcal{R}^{s+1}_G \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^{s+i}_G \arrow[r] & \mathcal{R}^{s+i+1}_G \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

FIG. 3 – *Méthode générale de construction d'un représentant ψ de $f \cdot e$*

Le choix du morphisme de complexe $\mathcal{R}^{\bullet - s}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \to \mathcal{R}^{\bullet}_G$ influe sur ψ, mais pas sur la classe d'extensions que ψ définit.

On construit maintenant un tel morphisme à l'aide du complexe $\mathcal{R}^{\bullet}_G(v)$. Par définition, le morphisme φ se factorise en

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}^{(k)} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \mathcal{R}^s_G(v) = v \arrow[r] & \mathcal{R}^s_G .
\end{tikzcd}$$

De plus, la composition

$$\mathrm{Id}^{(k)} \longrightarrow \mathcal{R}^s_G(v) \longrightarrow \mathcal{R}^{s+1}_G(v)$$

est nulle. Par conséquent, il existe un morphisme de complexes

$$\mathcal{R}^{\bullet - s}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \longrightarrow \mathcal{R}^{\bullet}_G(v) .$$

En le composant avec l'inclusion $\mathcal{R}^{\bullet}_G(v) \longrightarrow \mathcal{R}^{\bullet}_G$, on obtient un morphisme de complexes $\mathcal{R}^{\bullet - s}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \to \mathcal{R}^{\bullet}_G$, décrit par la figure 4.

Si la composition de Yoneda $f \cdot e$ est non nulle, le morphisme ψ de la figure 4 représente une extension non nulle de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, -)$ au diagramme de la figure 4, on obtient une composition de morphismes de complexes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet - s}_{\mathrm{Id}^{(k)}}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G(v)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G).$$

Ces morphismes induisent des morphismes sur l'homologie en degré $s+i$:

$$\mathrm{H}^{s+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet - s}_{\mathrm{Id}^{(n)}}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{H}^{s+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G(v)\right)\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^{s+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G)\right),$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Id}^{(k)} \arrow[d] \arrow[ddd, bend right=60, "\varphi"'] & & & \mathrm{Id}^{(k)} \arrow[d, "\xi"'] \arrow[ddd, bend left=60, dotted, "\psi"] & \\
 & S^{p^k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}^1_{\mathrm{Id}^{(k)}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(k)}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^s_G(v) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}^{s+1}_G(v) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^{s+i}_G(v) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^s_G \arrow[r] & \mathcal{R}^{s+1}_G \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}^{s+i}_G \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

FIG. 4 – *Construction explicite d'un représentant ψ de $f \cdot e$*

ce qui s'écrit aussi

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)}) \longrightarrow \mathrm{H}^{s+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G(v)\right)\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{s+i}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G).$$

La composition ci-dessus correspond à la composition de Yoneda (à gauche) par f. Puisque $f \cdot e$ est non nul cette composition est non nulle, et donc

$$\mathrm{H}^{s+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G(v)\right)\right) \neq 0.$$

Or, ce groupe est un sous-quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}\left((\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}^{s+i}_G(v)\right)$. Par le théorème de Pirashvili, (théorème 1.6), pour que ce groupe ne soit pas nul, il faut que le terme $\mathcal{R}^{s+i}_G(v)$ contienne au moins un facteur élémentaire qui ne soit pas un produit tensoriel non trivial de puissances symétriques, c'est-à-dire un facteur égal à S^{p^k}. $\square$

La proposition 5.3 admet une version réciproque. Nous n'avons pas réussi à montrer que la réciproque est vraie pour toute résolution réduite, mais pour au moins une.

Pour tout $i \geqslant 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)})$ est de dimension 0 ou 1. Si cette dimension est 1, on note $e(i)$ un élément générateur de $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)})$. Dans les autres cas, $e(i)$ désigne l'extension nulle. L'extension $e(i)$ est non nulle si et seulement si i est un entier positif ou nul pair strictement inférieur à $2p^k$.

Proposition 5.4 *Soit $\mathcal{R}_G^\bullet$ une S-résolution réduite explicite d'un foncteur $G \in \mathcal{P}_{p^k}$, et $f \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ une extension représentée par un facteur élémentaire $v_{\mathcal{R}} = S^{p^k}$ de $\mathcal{R}_G^s$. Soit i un entier positif ou nul. Alors si l'extension $f \cdot e$ est nulle, il existe une résolution réduite explicite $\mathcal{T}_G^\bullet$ de G et un facteur élémentaire $v_{\mathcal{T}} = S^{p^k}$ de $\mathcal{T}_G^s$ représentant l'extension f, tels que les sommets de $\Gamma(\{v\}, s+i)$ sont tous différents de S^{p^k}.*

Démonstration.
On note comme plus haut $\varphi = \varphi_{v_{\mathcal{R}}}$ le morphisme $\mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}_G^s$ égal au Frobenius sur $v_{\mathcal{R}}$ et nul sur les autres facteurs. Ce morphisme est un représentant de f.

On commence par construire une S-résolution explicite $\mathcal{S}_G^\bullet$ de G qui répond *presque* au problème. Plus précisément, on construit $\mathcal{S}_G^\bullet$ et un morphisme de complexe $g^\bullet \mathcal{S}_G^\bullet \longrightarrow \mathcal{R}_G^\bullet$ tels que :

1. pour tout $t < s$, $\mathcal{R}_G^t = \mathcal{S}_G^t$ et g^t est donné par l'égalité entre ces termes ;
2. il existe un facteur élémentaire $v_{\mathcal{S}} = S^{p^k}$ de $\mathcal{S}_G^s$ tel que la restriction de g^s à $v_{\mathcal{S}}$ soit un isomorphisme sur $v_{\mathcal{R}}$, et soit nulle sur les autres facteurs élémentaires de $\mathcal{R}_G^\bullet$ égaux à S^{p^k}. En particulier, $v_{\mathcal{S}}$ représente f ;
3. le morphisme
$$\mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet(v_{\mathcal{S}})\right) \longrightarrow \mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet\right),$$
induit sur les premières suites spectrales d'hypercohomologie par l'inclusion $\mathcal{S}_G^\bullet(v_{\mathcal{S}}) \hookrightarrow \mathcal{S}_G^\bullet$ est nul en rang 2 et en degré $(s+i, 0)$:
$$\mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet(v_{\mathcal{S}})\right) \xrightarrow{0} \mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet\right).$$

Construction de $\mathcal{S}_G^\bullet$.
On note K le noyau de la différentielle $\mathcal{R}_G^s \to \mathcal{R}_G^{s+1}$. Comme
$$d \circ \varphi \ : \ \mathrm{Id}^{(k)} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}_G^s \xrightarrow{d} \mathcal{R}_G^{s+1}$$
est nul, φ se factorise par K. Soit $\varphi' \ : \ \mathrm{Id}^{(k)} \to K$ le morphisme qui factorise φ_m, et soit C le conoyau de φ'. On obtient une suite exacte courte
$$0 \longrightarrow \mathrm{Id}^{(k)} \xrightarrow{\varphi'} K \longrightarrow C \longrightarrow 0. \qquad (10)$$

En effet, le morphisme φ' est injectif, puisqu'il est non nul, et que $\mathrm{Id}^{(k)}$ est un objet simple de $\mathcal{P}$. Trouver une S-résolution $\mathcal{S}_G^\bullet$ telle que pour tout $t < s$, $\mathcal{S}_G^t$ soit égal à $\mathcal{R}_G^t$ revient à trouver une S-résolution

$$K \longrightarrow \mathcal{S}_G^s \longrightarrow \mathcal{S}_G^{s+1} \longrightarrow \cdots$$

de K. On en construit une à partir de la suite exacte courte (10). Soit $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ une S-résolution explicite de $\mathrm{Id}^{(k)}$, que l'on suppose réduite ; on la choisit telle que $\mathcal{R}^0_{\mathrm{Id}^{(k)}} = S^{p^k}$. Soit de même $\mathcal{R}_C^\bullet$ une S-résolution réduite de C. Par un résultat classique d'algèbre homologique, K admet alors une résolution injective $\mathcal{S}_K^\bullet$ telle que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathcal{S}_K^t = \mathcal{R}^t_{\mathrm{Id}^{(k)}} \oplus \mathcal{R}_C^t.$$

La résolution injective $\mathcal{S}_K^\bullet$ de K est une S-résolution explicite, la décomposition de $\mathcal{S}_K^t$ étant donnée par celles de $\mathcal{R}^t_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ et de $\mathcal{R}_C^t$. De plus, la différentielle d_K de $\mathcal{R}_K^\bullet$ est égale à la somme de la différentielle $d_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ du complexe $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ sur la composante $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$, de la différentielle d_C du complexe $\mathcal{R}_C^\bullet$ sur la composante $\mathcal{R}_C^\bullet$, et d'une partie croisée $\mathcal{R}_C^\bullet \to \mathcal{R}^{\bullet+1}_{\mathrm{Id}^{(k)}}$. En revanche, il n'y a pas de composante $\mathcal{R}^{\bullet+1}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \to \mathcal{R}_C^\bullet$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^{\bullet+1}_{\mathrm{Id}^{(k)}} & \oplus & \mathcal{R}_C^{\bullet+1} \\ \mathcal{R}^{\bullet}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \arrow[u, "d_{\mathrm{Id}^{(k)}}"] & \oplus & \mathcal{R}_C^{\bullet} \arrow[u, "d_C"'] \arrow[ull] \end{tikzcd} \tag{11}$$

Il en résulte notamment que $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ est un sous-complexe de $\mathcal{S}_K^\bullet$. La S-résolution répondant à la propriété 3 est alors définie par

$$\mathcal{S}_G^t = \begin{cases} \mathcal{R}_G^t & \text{si } t < s, \\ \mathcal{S}_K^{t-s} & \text{si } t \geqslant s, \end{cases}$$

avec les différentielles évidentes. L'inclusion de $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ dans $\mathcal{S}_K^\bullet$ définit une inclusion de $\mathcal{R}^{\bullet-s}_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ dans $\mathcal{S}_G^\bullet$. Le facteur élémentaire $v_{\mathcal{S}}$ est le facteur S^{p^k} provenant de $\mathcal{R}^0_{\mathrm{Id}^{(k)}}$.

Le morphisme $g^\bullet : \mathcal{S}_G^\bullet \longrightarrow \mathcal{R}_G^\bullet$ est défini par l'identité sur les termes de degré $t < s$; la donnée de ces composantes permet de définir (à homotopie près) le morphisme de complexes $g^\bullet$. Le morphisme obtenu vérifie la propriété 2. En effet, en le composant avec l'inclusion $\mathcal{R}^{\bullet-s}_{\mathrm{Id}^{(k)}} \to \mathcal{S}_G^\bullet$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}^{(k)} \arrow[r] \arrow[d] & S^{p^k} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
K \arrow[r] \arrow[d, equal] & v_{\mathcal{S}} \oplus \mathcal{R}^0_C = \mathcal{S}^s_G \arrow[r] \arrow[d, "g^s"] & \cdots \\
K \arrow[r] & v_{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R}'^s_G = \mathcal{R}^s_G \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ici, $\mathcal{R}'^s_G$ est la somme de tous les facteurs élémentaires de $\mathcal{R}^s_G$ différents de $v_{\mathcal{R}}$. Par définition du morphisme $\mathrm{Id}^{(k)} \to K$, la composition

$$\mathrm{Id}^{(k)} \longrightarrow K \longrightarrow v_{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R}'^s_G \xrightarrow{proj.} v_{\mathcal{R}} = S^{p^k}$$

est non nulle. Cela implique notamment que la projection sur $v_{\mathcal{R}}$ de la restriction de $g^s : \mathcal{S}^s_G \longrightarrow \mathcal{R}^s_G$ à $v_{\mathcal{S}}$ est non nulle. Comme c'est un endomorphisme de S^{p^k}, c'est un isomorphisme. De plus, toujours par définition du morphisme $\mathrm{Id}^{(k)} \to K$, la composition

$$\mathrm{Id}^{(k)} \longrightarrow K \longrightarrow v_{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R}'^s_G \xrightarrow{proj.} \mathcal{R}'^s_G$$

est nulle. Par conséquent, la projection sur un facteur élémentaire S^{p^k} autre que $v_{\mathcal{R}}$ de la restriction de g^s à $v_{\mathcal{S}}$ n'est pas un isomorphisme, et est donc nulle. Cela prouve la propriété 2 pour le morphisme $g^\bullet$.

Il reste à montrer la propriété 3. Soit $\Gamma(\{v_{\mathcal{S}}\})$ le sous-graphe de $\Gamma(\mathcal{S}^\bullet_G)$ engendré par le sommet $v_{\mathcal{S}}$. Puisque $\mathcal{R}^{\bullet-s}_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ est un sous-complexe de $v_{\mathcal{S}}$, le graphe $\Gamma(\{v_{\mathcal{S}}\})$ est aussi le sous-graphe de $\Gamma(\mathcal{R}^{\bullet-s}_{\mathrm{Id}^{(k)}})$ engendré par le sommet $v_{\mathcal{S}}$ en degré s. Comme $\mathcal{R}^\bullet_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ est une résolution *réduite* de $\mathrm{Id}^{(k)}$, elle possède d'après le théorème 1.9 exactement un facteur élémentaire égal à S^{p^k} en degré pair strictement inférieur à $2p^k$, et aucun dans les autres degrés. Ainsi, $\Gamma(\{v_{\mathcal{S}}\})$ a au plus un sommet égal à S^{p^k} en degré $s+2t$, $0 \leqslant t < p^k$, et n'en a aucun dans les autres degrés.

– Si $e(i)$ est nulle (soit i est impair, soit $i \geqslant 2p^k$), l'argument ci-dessus montre qu'il n'y a pas de facteur élémentaire égale à S^{p^k} dans l'ensemble de sommets $\Gamma(\{v_{\mathcal{S}}\}, s+i)$, et

$$\mathbf{I}_1^{i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G(\{v_{\mathcal{S}}\})\right) = 0,$$

ce qui implique immédiatement la propriété 3.

– Supposons que $e(i)$ est non nulle, et que $f \cdot e(i) = 0$. L'extension $e(i)$ est représentée, à un scalaire près, par le morphisme $\xi \; : \; \mathrm{Id}^{(k)} \to \mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ égal au Frobenius sur le seul facteur élémentaire égal à S^{p^k}, et égal à 0 sinon. Pour que $\mathcal{S}^\bullet_G$ vérifie la propriété 3, il faut montrer que le morphisme

$$\mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{S}}\right)\right) \longrightarrow \mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\right) \tag{12}$$

est nul. Soit $\mathbf{I}_1^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{S}}\right)\right)$ est nul, et dans ce cas la propriété 3 est évidente, soit $\mathbf{I}_1^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{S}}\right)\right)$ est non nul. Dans ce cas, $\Gamma\left(\{v_{\mathcal{S}}\}, s+i\right)$ possède au moins un (puis exactement un) sommet égal à S^{p^k}, qui correspond au facteur élémentaire S^{p^k} de $\mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(k)}}$ représentant $e(i)$. Ainsi, le morphisme ξ se factorise à travers $\mathcal{S}^{s+i}_G\left(v_{\mathcal{S}}\right)$. Alors, dire que le morphisme (12) est nul revient à dire que le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^{s+i}_G)$ défini par la composition

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id}^{(k)} \arrow[r, "Frob"] \arrow[rrr, bend right, "\xi"'] & S^{p^k} \arrow[r, tail] & \mathcal{S}^{s+i}_G\left(v_{\mathcal{S}}\right) \arrow[r, tail] & \mathcal{R}^i_{\mathrm{Id}^{(n)}} \arrow[r, tail] & \mathcal{S}^{s+i}_G \end{tikzcd}$$

est un représentant de l'extension nulle de $\mathrm{Ext}^{s+i}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$, ce qui est le cas, puisque ce morphisme représente l'extension $f \cdot [\xi] = f \cdot e(i)$.

Construction de $\mathcal{T}^\bullet_G$.
On peut maintenant construire une S-résolution *réduite* $\mathcal{T}^\bullet_G$ de G qui répond aux exigences de la proposition 5.4. En considérant la suite exacte longue associée à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Id}^{(k)} \longrightarrow K \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

on obtient, puisque $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)})$ est nul, une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, C) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\dim \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, K) = \dim \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathrm{Id}^{(k)}) + \dim \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, C).$$

Ainsi, puisque $\mathcal{R}^\bullet_C$ est une résolution *réduite* de C,

$$K \longrightarrow \mathcal{S}^0_K = S^{p^k} \oplus \mathcal{R}^0_C$$

est le début d'une S-résolution réduite explicite de K. On la complète en une S-résolution réduite explicite $\mathcal{T}_K^\bullet$ de K, où $\mathcal{T}_K^0 = \mathcal{S}_K^0$. On définit alors $\mathcal{T}_G^\bullet$ par

$$\mathcal{T}_G^t = \begin{cases} \mathcal{R}_G^t & \text{si } t < s \\ \mathcal{T}_K^{t-s} & \text{si } t \geqslant s. \end{cases}$$

On obtient ainsi une S-résolution réduite explicite $\mathcal{T}_G^\bullet$ de G telle que $\mathcal{T}_G^t = \mathcal{S}_G^t$ pour tout $t \leqslant s$. En particulier, le facteur élémentaire $v_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}_G^s$ est aussi un facteur élémentaire de $\mathcal{T}_G^s$, que l'on notera $v_{\mathcal{T}}$. Il existe un morphisme de complexes

$$h^\bullet \ : \ \mathcal{T}_G^\bullet \longrightarrow \mathcal{S}_G^\bullet$$

tel que $h^t : \mathcal{T}_G^t \to \mathcal{S}_G^t$ soit l'identité pour tout $t \leqslant s$. Notamment, la restriction du morphisme $h^\bullet$ à $v_{\mathcal{T}}$ est un isomorphisme sur le facteur $v_{\mathcal{S}}$, et nul sur les autres facteurs élémentaires. Par conséquent, $h^\bullet$ induit un morphisme de complexes

$$\widetilde{h^\bullet} \ : \ \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \longrightarrow \mathcal{S}_G^\bullet(v_{\mathcal{S}})$$

tel que le carré suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_G^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & \mathcal{S}_G^\bullet \\
\mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \arrow[u, "incl."] \arrow[r, "\widetilde{f^\bullet}"] & \mathcal{S}_G^\bullet(v_{\mathcal{S}}) \arrow[u, "incl."'] .
\end{tikzcd}$$

Ce carré commutatif induit un carré commutatif de morphismes de suites spectrales sur les premières suites spectrales d'hypercohomologie $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(k)}, -)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}_G^\bullet\right) \arrow[r] & \mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet\right) \\
\mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}})\right) \arrow[u, "incl."] \arrow[r] & \mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet(v_{\mathcal{S}})\right) \arrow[u, "incl."'] .
\end{tikzcd}$$

Toutes ces suites spectrales sont nulles ailleurs que sur leur ligne 0. De plus :

– comme $\mathcal{T}_G^\bullet$ et $\mathcal{S}_G^\bullet$ sont deux résolutions injectives du même objet G, $\mathbf{I}_2^{*,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}_G^\bullet\right)$ et $\mathbf{I}_2^{*,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}_G^\bullet\right)$ sont égaux à $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$, et le morphisme du haut est un isomorphisme ;
– en rang 1, le morphisme de gauche

$$\mathbf{I}_1^{*,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}})\right) \to \mathbf{I}_1^{*,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}_G^\bullet\right)$$

est le morphisme induit sur

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^t_G\left(v_{\mathcal{T}}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^t_G)$$

par l'inclusion directe $\mathcal{T}^t_G\left(v_{\mathcal{T}}\right) \longrightarrow \mathcal{T}^t_G$. Il donc injectif ;

- ce morphisme reste une injection en rang 2, car la suite spectrale $\mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^\bullet_G\right)$ dégénère au rang 1, puisque la S-résolution $\mathcal{T}^\bullet_G$ est réduite ;
- par la propriété 3 pour $\mathcal{S}^\bullet_G$, le morphisme de droite est nul au rang 0 en degré $(s+i, 0)$.

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^\bullet_G\right) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\right) \\
\mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{T}}\right)\right) \arrow[r] \arrow[u, "inj."] & \mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{S}}\right)\right) . \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd} \tag{13}$$

Par conséquent, le morphisme

$$\mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{T}}\right)\right) \longrightarrow \mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{S}^\bullet_G\right)$$

obtenu en composant des deux manières possibles les flèches du carré (13) est à la fois nul et injectif. Ainsi,

$$\mathbf{I}_2^{s+i,0}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^\bullet_G\left(v_{\mathcal{T}}\right)\right) = 0.$$

puis

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}^{s+i}_G\left(v_{\mathcal{T}}\right)\right) = 0,$$

puisque les différentielles de rang 1 sont nulles, du fait que $\mathcal{T}^\bullet_G$ est réduite. Par le théorème de Pirashvili (théorème 1.6), on en déduit que tous les facteurs élémentaires de $\mathcal{T}^{s+i}_G\left(v_{\mathcal{T}}\right)$ sont différents de S^{p^k}. □

Remarque 5.5 La construction de $\mathcal{T}^\bullet_G$ ne dépend pas du degré i de l'extension $e(i)$ considérée dans l'énoncé. On n'utilise l'entier i qu'au moment de vérifier qu'on a les propriétés requises pour la résolution $\mathcal{T}^\bullet_G$. Ainsi, on peut faire le même raisonnement en considérant plusieurs indices $i_1, \ldots, i_k$. On obtient la propriété suivante :

Proposition 5.6 *Soit f un objet de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. Soit $i_1 < \cdots < i_\ell$ des entiers tels que pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant \ell$, le produit $f \cdot e(i_j)$ est nul. Alors il existe une S-résolution réduite explicite $\mathcal{T}^\bullet_G$, et un facteur élémentaire $v_{\mathcal{T}} = S^{p^k}$ de $\mathcal{T}^s_G$ représentant f, tels que tous les sommets de $\Gamma(\{v_{\mathcal{T}}\})$ en degrés $s+i_1, \ldots, s+i_\ell$ sont différents de S^{p^k}.*

6 Graphes et différentielles

Soit F et G deux objets de $\mathcal{P}$, homogènes de degré respectivement p^h et p^k. Soit $\mathcal{R}^\bullet_G$ une S-résolution réduite de G, et $v_{\mathcal{R}} = S^{p^k}$ un facteur élémentaire de $\mathcal{R}^s_G$ représentant une extension $f \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. Le complexe $\mathcal{R}^\bullet_G \circ F$ obtenu en précomposant $\mathcal{R}^\bullet_G$ par F est une résolution (non injective) de $G \circ F$, puisque la précomposition est exacte. Ainsi, sa première suite spectrale $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F)$ converge vers $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$. De plus, puisque la résolution $\mathcal{R}^\bullet_G$ est réduite, elle est décrite *en rang* 1 par l'isomorphisme bigradué :

$$\mathbf{I}_1^{*_1,*_2} = \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F). \tag{14}$$

Autrement dit chaque colonne d'abscisse t est constituée d'autant de copies de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$ qu'il y a de facteurs élémentaires S^{p^k} dans $\mathcal{R}^t_G$. En particulier, au facteur $v_{\mathcal{R}}$ correspond une copie

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, v_{\mathcal{R}} \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F).$$

Dans la notation de l'équation (14), les éléments de cette copie correspondent aux éléments $f \otimes f'$, $f' \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$.

Proposition 6.1 *Soit t un entier strictement positif. Dans le contexte ci-dessus, si pour tout i tel que $0 < i \leqslant t$, le produit $f \cdot e(i)$ est nul, alors les différentielles de rang inférieur ou égal à t de $\mathbf{I}_1(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F)$ sont nulles sur les éléments $f \otimes f'$ et leurs images en rangs supérieurs.*

Démonstration.

D'après la proposition 5.6, il existe une S-résolution réduite explicite $\mathcal{T}^\bullet_G$ de G telle que

1. $\mathcal{T}^u_G = \mathcal{R}^u_G$ si $u < s$;
2. il existe un facteur élémentaire $v_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}^s_G$, et un morphisme de complexes $g^\bullet : \mathcal{T}^\bullet_G \to \mathcal{R}^\bullet_G$ telle que g^u est l'identité si $u < s$, et la restriction de g^s à $v_{\mathcal{T}}$ est un isomorphisme sur le facteur $v_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}^\bullet_G$, et est nulle sur les autres facteurs élémentaires égaux à S^{p^k} ;

3. le sous-graphe $\Gamma(v_{\mathcal{T}})$ de $\Gamma(\mathcal{T}_G^\bullet)$ ne contient pas de sommet égal à S^{p^k}, en tout degré i tel que $1 \leqslant i \leqslant t$.

Le morphisme $g^\bullet \circ F \ : \ \mathcal{T}_G^\bullet \to \mathcal{R}_G^\bullet$ induit un isomorphisme de suites spectrales à partir du rang 2

$$\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet \circ F) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_G^\bullet \circ F).$$

Puisque les résolutions $\mathcal{R}_G^\bullet$ et $\mathcal{T}_G^\bullet$ sont réduites, c'est en fait un isomorphisme à partir du rang 1. De plus, grâce à la propriété 2 ci-dessus, la restriction du morphisme induit par $g^\bullet \circ F$ en rang 1 au facteur direct $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, v_{\mathcal{T}} \circ F)$ de $\mathbf{I}_1(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{T}_G^\bullet \circ F)$ est un isomorphisme sur le facteur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, v_{\mathcal{R}} \circ F)$ de $\mathbf{I}_1(\mathrm{Id}^{(k)}, \mathcal{R}_G^\bullet \circ F)$, et nul sur les autres facteurs. Autrement dit, le morphisme $g^\bullet \circ F$ induit *l'identité* sur les termes $f \otimes f'$, $f' \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$.

Il suffit donc de montrer que les différentielles de rang inférieur ou égal à t de la suite spectrale $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet \circ F)$ sont nulles sur les termes $f \otimes f'$, pour $f' \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$. L'inclusion $\mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \to \mathcal{T}_G^\bullet$ induit un morphisme de suites spectrales

$$\mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \circ F\right) \longrightarrow \mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet \circ F\right). \tag{15}$$

Sur les termes E_1, ce morphisme est une inclusion : sur la colonne d'abscisse t, c'est le morphisme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^t(v_{\mathcal{T}}) \circ F\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^t \circ F\right)$$

induit par l'inclusion directe $\mathcal{T}_G^t(\Gamma(v_{\mathcal{T}})) \to \mathcal{T}_G^t$. Par exemple, sur la colonne d'abscisse s, il consiste en l'inclusion directe

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, v_{\mathcal{T}} \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^s \circ F) \\ f' & \longmapsto & f \otimes f'. \end{array}$$

D'après la proposition 5.6 et le théorème de Pirashvili, les colonnes d'abscisse j tel que $s < j \leqslant s+t$ de la suite spectrale $\mathbf{I}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(\Gamma(v_{\mathcal{T}})) \circ F\right)$ sont nulles. Ainsi, les différentielles de rang r, $r \leqslant t$ issues de la colonne d'abscisse s sont nulles ; les différentielles de but cette colonne sont aussi nulles, puisque de même les colonnes d'abscisse $j < s$ sont toutes nulles. Par conséquent,

$$\mathbf{I}_1^{s,*}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \circ F\right) = \mathbf{I}_2^{s,*}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \circ F\right) = \cdots$$
$$\cdots = \mathbf{I}_{t+1}^{s,*}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^\bullet(v_{\mathcal{T}}) \circ F\right).$$

En particulier, le morphisme (15) est en tout rang $r \leqslant t$ une surjection de la colonne s vers l'espace engendré par les images en rang supérieur des éléments $f \otimes f'$, $f' \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$. Ainsi, pour montrer que les différentielles de rang $1, \ldots, t$ sont nulles sur $f \otimes f'$, il suffit de montrer que pour tout $r \leqslant t$, la composition

$$\mathbf{I}_r^{s,*}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^{\bullet}(v_{\mathcal{T}}) \circ F\right) \longrightarrow \mathbf{I}_r^{s,*}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^{\bullet} \circ F\right) \xrightarrow{d_j} \\ \xrightarrow{d_j} \mathbf{I}_r^{s+j,*-j+1}\left(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^{\bullet} \circ F\right)$$

est nulle. Cela provient du carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I}_r^{s,*}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^{\bullet} \circ F) \arrow[r, "d_r"] & \mathbf{I}_r^{s+t,*-r+1}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{T}_G^{\bullet} \circ F) \\
\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, v_{\mathcal{T}} \circ F) \arrow[u] \arrow[r, "d_r"] & 0. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

□

La proposition 6.1 admet une version jumelle en postcomposant par F au lieu de précomposer. On gère le défaut d'exactitude de la postcomposition grâce au théorème 1.11 : la suite spectrale $\mathbf{I}_1(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F \circ \mathcal{R}_G^{\bullet})$ est comme précédemment égale à

$$\mathbf{I}_1^{*_1,*_2}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F \circ \mathcal{R}_G^{\bullet}) = \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F \circ S^{p^k}).$$

On obtient, par la même démonstration, en faisant appel au théorème 1.7 :

Proposition 6.2 *Soit t un entier strictement positif. Si pour tout $i \leqslant t$, le produit $f \cdot e(i)$ est nul, alors les différentielles de rang inférieur ou égal à t de la suite spectrale $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F \circ \mathcal{R}_G^{\bullet})$ sont nulles sur les éléments $f \otimes f'$, $f' \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F \circ S^{p^k})$.*

7 Une formule pour $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème 1 annoncé dans l'introduction. Nous montrons dans un premier temps que la formule du théorème 1 est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

THÉORÈME 7.1 *Soit F et G deux objets de $\mathcal{P}$, homogènes de degrés respectifs p^h et p^k. On désigne également par F et G leur image dans $\mathcal{F}$. On suppose que* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ *et* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ *ont une structure de module de Yoneda* triviale. *Alors, en tant qu'espace vectoriel gradué,*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G\circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h}\circ S^{p^k}).$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{R}^\bullet_G$ une S-résolution réduite explicite de G, et $\mathcal{R}^\bullet_G \circ F$ le complexe obtenu en précomposant la résolution $\mathcal{R}^\bullet_G$ par F. Puisque la précomposition est exacte, la seule cohomologie de ce complexe est $G \circ F$ en degré 0. Par conséquent, sa seconde suite spectrale d'hypercohomologie est donnée par

$$_{\mathcal{P}}\mathbf{II}_2^{*,t}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F) = \begin{cases} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G\circ F) & \text{si t=0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, elle dégénère au rang 2, et la cohomologie totale est

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G\circ F).$$

Ainsi, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G\circ F)$ est l'aboutissement de la première suite spectrale d'hypercohomologie $_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F)$. Puisque, d'après le théorème de Pirashvili (théorème 1.6),

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, w\circ F) = 0$$

pour tout facteur élémentaire w de $\mathcal{R}^\bullet_G$ différent de S^{p^k}, celle-ci est donnée en rang 1 par

$$_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_1^{s,*}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F) = \left[\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k}\circ F)\right]^{\oplus d_s},$$

où d_s est le nombre de facteurs élémentaires égaux à S^{p^k} de $\mathcal{R}^s_G$. Comme la S-résolution $\mathcal{R}^\bullet_G$ est réduite, d_s est la dimension de $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$. Ainsi, en tant qu'espace vectoriel bigradué,

$$_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_1^{*_1,*_2}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F) \cong \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)\otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k}\circ F). \quad (16)$$

Mais puisque $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ est un module trivial, toutes les différentielles de $_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F)$ sont nulles d'après la proposition 6.1. Ainsi, la suite spectrale $_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F)$ dégénère au rang 1, et l'isomorphisme (16) donne à l'aboutissement un isomorphisme d'espaces vectoriels gradué :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G\circ F) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)\otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k}\circ F). \quad (17)$$

On raisonne de la même façon pour exprimer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$ en fonction de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ S^{p^h})$, à la différence près que maintenant on post-compose une certaine résolution $\mathcal{R}^\bullet_F$ de F par S^{p^k}, et que la post-composition n'est pas exacte.

Soit $\mathcal{R}^\bullet_F$ une S-résolution réduite explicite de F. Le complexe $S^{p^k} \circ \mathcal{R}^\bullet_F$ n'est pas exact, mais, d'après le théorème 1.11, sa cohomologie vérifie

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{H}^s(S^{p^k} \circ \mathcal{R}^\bullet_F)) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ \mathrm{H}^s(\mathcal{R}^\bullet_F)).$$

Ainsi, *modulo* $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}^{(h+k)}, -)$, sa cohomologie est $S^{p^k} \circ F$ en degré 0. En particulier, on peut, comme précédemment, calculer la seconde suite spectrale, et son aboutissement :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ \mathcal{R}^\bullet_F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F).$$

D'après la version forte 1.7 du théorème de Pirashvili, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ w)$ est nul dès lors que le facteur élémentaire w de $\mathcal{R}^\bullet_F$ est différent de S^{p^k}. Ainsi, on obtient un isomorphisme d'espaces bigradués

$${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}_1^{*_1,*_2}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ \mathcal{R}^\bullet_F) \cong \mathrm{Ext}^{*_1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^{*_2}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ S^{p^h}).$$

D'après la proposition 6.2, cette suite spectrale dégénère au rang 1, ce qui donne une expression de l'aboutissement :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ S^{p^h}). \quad (18)$$

Les isomorphismes (17) et (18) donnent la formule du théorème 7.1. □

Remarque 7.2 Le produit tensoriel

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h} \circ S^{p^k})$$

est un module de Yoneda sur l'algèbre de Yoneda $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$, l'action de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ se faisant sur le troisième facteur : si f, g, h sont des éléments respectivement de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F)$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h} \circ S^{p^k})$, alors l'action d'un élément e de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$ sur $f \otimes g \otimes h$ est donnée par

$$(f \otimes g \otimes h) \cdot e = f \otimes g \otimes (h \cdot e).$$

Théorème 7.3 *La formule du théorème 7.1 est un isomorphisme de modules de Yoneda sur l'algèbre* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$*, dans le sens de la remarque 7.2.*

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème 7.1, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, F\circ G)$ est *en tant que module* une somme de suspensions de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^h} \circ S^{p^k})$.

Démonstration.

On montre dans un premier temps que l'isomorphisme (17) est un isomorphisme de modules, la structure de module du produit tensoriel provenant de la structure de module du second facteur. Le problème vient de ce que le produit tensoriel de deux éléments $f \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ et $g \in \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$ n'est *a priori* pas bien défini dans l'aboutissement $\mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$ de la suite spectrale ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G \circ F)$, car on n'obtient qu'un gradué de la cohomologie totale. On va construire explicitement un élément $f \boxtimes g$ de $\mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$ tel que

1. l'application $(f, g) \longmapsto f \boxtimes g$ soit bilinéaire ;
2. l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F) \\ f \otimes g & \longmapsto & f \boxtimes g \end{array} \tag{19}$$
soit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués ;
3. l'application (19) soit un morphisme de modules de Yoneda, ce qui revient à dire que la structure de Yoneda de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$ est donnée sur les éléments $f \boxtimes g$ par la relation
$$(f \boxtimes g) \cdot e = f \boxtimes (g \cdot e).$$

On se fixe f dans $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$, qu'on peut supposer représenté par un facteur élémentaire v de $\mathcal{R}^s_G$. Quitte à remplacer $\mathcal{R}^\bullet_G$ par la S-résolution réduite explicite $\mathcal{T}^\bullet_G$ de la proposition 5.6 (pour tous les indices $i \geqslant 1$), on peut supposer que le seul sommet de $\Gamma(v)$ égal à S^{p^k} est v lui-même.

Soit $I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathcal{R}^\bullet_G \circ F$. On en déduit une résolution injective de $G \circ F$:
$$G \circ F \longrightarrow \mathrm{Tot}(I^{\bullet\bullet}).$$

Considérons le morphisme d'inclusion
$$\mathcal{R}^\bullet_G(v) \circ F \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet_G \circ F. \tag{20}$$

Soit $J^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe $\mathcal{R}^\bullet_G(v)$. Le facteur v étant en degré s, la première colonne non nulle de $J^{\bullet\bullet}$ est d'abscisse s. Le morphisme (20) fournit un morphisme entre les résolutions de Cartan-Eilenberg, puis entre les complexes totaux associés, ainsi qu'entre les mêmes complexes auxquels on a appliqué $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, -)$, et enfin entre la cohomologie de ces complexes :

$$\mathrm{H}^* \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Tot}(J^{\bullet\bullet}))\right) \longrightarrow \mathrm{H}^* \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Tot}(I^{\bullet\bullet}))\right). \quad (21)$$

L'argument du théorème 7.1 montre que c'est une injection, car $\mathcal{R}_G^\bullet(v) \to \mathcal{R}_G^\bullet$ induit une injection en rang 1 sur les premières suites spectrales d'hypercohomologie, et ces suites spectrales dégénèrent au rang 1.

Soit g un élément de $\mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$. Puisque $J^{s,\bullet}$ est une résolution injective de $v \circ F = S^{p^k} \circ f$, l'extension g est représentée par un morphisme $\widetilde{g} : \mathrm{Id}^{(h+k)} \to J^{s,t}$ tel que la composition

$$\mathrm{Id}^{(h+k)} \xrightarrow{\widetilde{g}} J^{s,t} \xrightarrow{d^v} J^{s,t+1}$$

soit nulle. En revanche, la composition

$$\mathrm{Id}^{(h+k)} \xrightarrow{\widetilde{g}} J^{s,t} \xrightarrow{d^h} J^{s+1,t}$$

n'a en général aucune raison d'être nulle : le morphisme $\widetilde{g}$ ne représente en général pas un élément de $\mathrm{H}^t \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Tot}(J^{\bullet,\bullet}))\right)$. Notons (F^u) la filtration de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, I^{\bullet\bullet})$ définie par

$$F^u = \sum_{u' \geqslant u} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, I^{u',\bullet}),$$

et $F^u\mathrm{H}^*$ la filtration de $\mathrm{H}^* \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Tot}(I^{\bullet\bullet}))\right)$ associée. On note de la même manière (F^u_Γ) et $(F^u_\Gamma\mathrm{H})$ les filtrations similaires pour le bicomplexe $J^{\bullet\bullet}$. D'après la proposition 5.6, le seul facteur non égal à un produit tensoriel non trivial de $\mathcal{R}_G^\bullet(v)$ est v lui-même : la suite spectrale $\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_G^\bullet(v) \circ F)$ est nulle sur toutes les colonnes autres que celle d'abscisse s, égale à $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$. Ainsi, la suite spectrale dégénère au rang 1, et h, non nul dans le tableau $\mathbf{I}_1^{s,t}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}_G^\bullet(v) \circ F)$ est encore non nul dans l'aboutissement. Il définit donc un élément (encore noté h) de $F^s_\Gamma\mathrm{H}/F^{s+1}_\Gamma\mathrm{H}$, en degré total $s+t$. Mais comme la suite spectrale est nulle en abscisses autres que s, chacun des quotients $F^u_\Gamma\mathrm{H}/F^{u+1}_\Gamma\mathrm{H}$ est nul, pour $u \neq s$. Ainsi, $F^{s+1}_\Gamma\mathrm{H}$ est nul, et $F^s_\Gamma\mathrm{H}$ est égale à la cohomologie totale. Par conséquent, g définit sans ambigüité un élément non nul g' de $\mathrm{H}^{s+t} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Tot}(J^{\bullet\bullet}))\right)$.

On définit alors l'élément $f \boxtimes h$ de

$$\mathrm{H}^{h+t}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Tot}(I^{\bullet\bullet}))\right) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$$

comme étant l'image de g' par le morphisme (21).

Le morphisme $(f, g) \mapsto f \boxtimes g$ est clairement bilinéaire. Il induit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F) \\ f \otimes g & \longmapsto & f \boxtimes g. \end{array}$$

En raison du théorème 7.1, les dimensions (degré par degré) sont les mêmes pour l'espace source et l'espace but. Ainsi, il suffit de montrer la surjectivité. Soit $\widetilde{g'} : \mathrm{Id}^{(h+k)} \longrightarrow \mathrm{Tot}(J^{\bullet\bullet})$ un représentant de g'. Alors, l'image de $\widetilde{h'}$ par le morphisme

$$\mathrm{Tot}(J^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Tot}(I^{\bullet\bullet})$$

est un représentant de $f \boxtimes g$. On en déduit que $f \boxtimes g$ est un élément du s-ième terme $F^s\mathrm{H}$ de la filtration de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$. De plus, son image dans $F^s\mathrm{H}/F^{s+1}\mathrm{H}$ est exactement égal à l'élément $f \otimes g$ de $\mathbf{I}_\infty(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^\bullet_G)$. Ainsi, l'égalité $F^s\mathrm{H}/F^{s+1}\mathrm{H} \longrightarrow F^s\mathrm{H}/F^{s+1}\mathrm{H}$ se factorise par le sous-espace gradué

$$\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \boxtimes \mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F),$$

de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$ la graduation étant donnée par $* + s$. Ici,

$$\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \boxtimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$$

désigne le sous-espace engendré par tous les éléments $f \boxtimes g$, pour $f \in \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G)$ et $g \in \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F)$. Ainsi, pour tout s,

$$\dim \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \boxtimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) \geqslant \dim F^s\mathrm{H}/F^{s+1}\mathrm{H},$$

puis

$$\dim \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \boxtimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{p^k} \circ F) \geqslant \dim \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F).$$

Comme le premier est un sous-espace du deuxième, on en déduit l'égalité des dimensions, et donc des espaces : $f \otimes g \mapsto f \boxtimes g$ est surjective.

Il reste à montrer que c'est un isomorphisme de modules. Avec f et g comme précédemment, il faut montrer, pour tout $e \in \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{Id}^{(h+k)})$,

$$(f \boxtimes g) \cdot e = f \boxtimes (g \cdot e).$$

Soit

$$0 \longrightarrow \mathrm{Id}^{(h+k)} \longrightarrow U_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathrm{Id}^{(h+k)} \longrightarrow 0 \qquad (22)$$

un représentant "à la Yoneda" de l'extension e. On obtient un représentant $\widetilde{h'}\ :\ \mathrm{Id}^{(h+k)} \longrightarrow \mathrm{Tot}(J^{\bullet\bullet})$ de $g' \cdot e$ dans la cohomologie totale $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G(v) \circ F)$ en construisant un morphisme de complexes entre le complexe acyclique (22) et le complexe injectif $\mathrm{Tot}(J^{\bullet\bullet})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Id}^{(h+k)} \arrow[d] \arrow[d, bend right=60, "\widetilde{g'}"'] & & & & \\
 & U_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & U_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Id}^{(h+k)} \arrow[d, "\widetilde{h'}"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tot}^{s+t}(J^{\bullet\bullet}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Tot}^{s+t+i-1}(J^{\bullet\bullet}) \arrow[r] & \mathrm{Tot}^{s+t+i}(J^{\bullet\bullet})
\end{tikzcd}$$

Par composition de $\widetilde{h'}$ avec la projection $\mathrm{Tot}^{s+t+i}(J^{\bullet\bullet}) \to J^{s,t+i}$ on obtient un représentant $h\ :\ \mathrm{Id}^{(h+k)} \to J^{s,t+i}$ de $g \cdot e$, dans la résolution $v \circ F \to J^{s,\bullet}$ de $v \circ F = S^{p^k} \circ F$. Ainsi, l'image de la classe de $\widetilde{h'}$ par le morphisme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G(v) \circ F) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathcal{R}^{\bullet}_G \circ F) \qquad (23)$$

est $f \boxtimes (g \cdot e)$. D'un autre côté, comme (23) est un morphisme de modules de Yoneda, l'image de la classe de $\widetilde{h'}$ par (23) est aussi égale à $(f \boxtimes g) \cdot e$.

Le fait que l'égalité (18) est un isomorphisme de modules se démontre de la même manière. $\square$

Remarque 7.4 D'après le théorème 1.10, et notamment l'étude de la structure de module, on déduit des expressions analogues *en tant que modules* après twist dans la catégorie $\mathcal{P}$, ou oubli dans la catégorie $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (G \circ F)^{(r)}) \cong \\ &\quad \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (S^{p^h} \circ S^{p^k})^{(r)})\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h)}, F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k)}, G) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{p^h} \circ S^{p^k}).$$

8 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$ en caractéristique 2.

Dans la fin de cet article, nous proposons une nouvelle méthode de calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^k} \circ S^{2^h})$ en caractéristique $p = 2$, contournant les calculs de [15]. La méthode repose sur le même principe général : l'emploi des suites spectrales d'hypercohomologie des complexes $\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h}$ obtenus en précomposant le complexe $\mathcal{S}^\bullet_{2^k}$ (égal à la partie de degré 2^k de la construction Cobar réduite du foncteur en algèbres de Hopf S^*) par le foncteur S^{2^h}. Grâce au théorème 7.1, nous réussissons beaucoup plus facilement que dans [15] à déterminer les différentielles de ces suites spectrales. Le seul antécédent que nous utilisons est le calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^2 \circ S^{2^h})$, présenté dans [14].

Dans tout ce qui suit, $p = 2$**.**

On rappelle qu'on considère dans [14, 15], des complexes $\mathcal{S}^\bullet_n$ définis comme la partie de degré n de la construction Cobar réduite du foncteur en algèbres de Hopf S^* :

$$\mathcal{S}^\bullet_n \ : \ S^n \longrightarrow \bigoplus_{\substack{i_1+i_2=n\\ i_1,i_2>0}} S^{i_1}\otimes S^{i_2} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{i_1+i_2+i_3=n\\ i_1,i_2,i_3>0}} S^{i_1}\otimes S^{i_2}\otimes S^{i_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (S^1)^{\otimes n}.$$

On sait calculer l'homologie de ces complexes (cf [8] Theorem I.4.27, ou [2]) :

$$\mathrm{H}^t(\mathcal{S}^\bullet_n) = \bigoplus_{\substack{\sum_{\ell\geqslant 0} i_\ell = t\\ \sum_{\ell\geqslant 0} i_\ell 2^\ell = n}} \bigotimes_{\ell \geqslant 0} S^{i_\ell(\ell)}.$$

Supposons maintenant que n est une puissance de 2, disons $n = 2^k$. L'homologie du complexe composé $\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h}$ est

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h}) = \bigoplus_{\substack{\sum_{\ell\geqslant 0} i_\ell = t\\ \sum_{\ell\geqslant 0} i_\ell 2^\ell = n}} \bigotimes_{\ell \geqslant 0} S^{i_\ell(\ell)} \circ S^{2^h}.$$

En particulier, en appliquant $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, -)$, on obtient, grâce au théorème d'annulation de Pirashvili :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, \mathrm{H}^t(\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})) = \\ &\qquad = \begin{cases} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, (S^{2^\ell} \circ S^{2^h})^{(k-\ell)}) & \text{si } t = 2^\ell,\ 0 \leqslant \ell \leqslant k,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

On obtient ainsi une description de la seconde suite spectrale d'hypercohomologie en rang 2 :

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}_2^{*,t}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)}) = \\
= \begin{cases} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (S^{2^\ell} \circ S^{2^h})^{(k+r-\ell)}) & \text{si } t = 2^\ell,\ 0 \leqslant \ell \leqslant k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Le morphisme de complexes

$$(\mathcal{S}^\bullet_{2^{k-1}})^{(1)} \longrightarrow \mathcal{S}^\bullet_{2^k}$$

défini par le morphisme de Frobenius induit un morphisme sur les suites spectrales

$${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^{k-1}} \circ S^{2^h})^{(r+1)}) \longrightarrow {}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)}),$$

consistant au rang 2 en l'inclusion des 2^{k-1} premières lignes. Ainsi, seule la ligne 2^k de la suite spectrale ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}_2(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$ n'est pas dans l'image de ce morphisme. Comme les différentielles non nulles issues de cette ligne sont au moins de degré $2^{k-1}+1$, on en déduit notamment que

$${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}_{2^{k-1}+1}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^{k-1}} \circ S^{2^h})^{(r+1)}) \longrightarrow {}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}_{2^{k-1}+1}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$$

est l'inclusion des 2^{k-1} premières lignes. Par conséquent, toutes les différentielles entre les lignes $0, \dots, 2^{k-1}$ sont les mêmes dans les deux suites spectrales. Pour déterminer toutes les différentielles de toutes les suites spectrales ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$, pour $k \geqslant 0$, il suffit donc de déterminer pour tout $k \leqslant 0$ les différentielles *issues de la ligne* 2^k de la suite spectrale ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.1 *Les différentielles issues de la ligne 2^k de la suite spectrale $\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^\bullet_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$ sont*
- *nulles si le quotient de la division euclidienne de l'abscisse de leur but par 2^{h+k} est pair ;*
- *surjectives si le quotient de la division euclidienne de l'abscisse de leur but par 2^{h+k} est impair.*

Suivant [15], on en déduit l'expression de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, G \circ F)$:

Théorème 8.2 *La série de Poincaré* $\varphi_{h,k}$ *de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{2^k} \circ S^{2^h})$ *est donnée par*

$$\varphi_{h,k}(t) = \sum_{i \geqslant 0} t^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{2^k} \circ S^{2^h}) = \frac{\prod_{i=1}^{h+k}(1-t^{2^i-1})}{\prod_{i=1}^{h}(1-t^{2^i-1})\prod_{i=1}^{k}(1-t^{2^i-1})}.$$

Par le théorème 1.10, on obtient la description des séries de Poincaré des espaces similaires obtenus soit en twistant davantage, soit en se plaçant dans $\mathcal{F}$:

$$\sum_{i \geqslant 0} t^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (S^{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)}) = (1 + t^{2^{h+k+1}} + \cdots + t^{2^{h+k+1}r}) \cdot \varphi_{h,k}(t) \,;$$

$$\sum_{i \geqslant 0} t^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^k} \circ S^{2^h}) = \frac{1}{1 - t^{2^{h+k+1}}} \cdot \varphi_{h,k}(t).$$

La démonstration de la proposition 8.1 constitue le coeur de [15]. La preuve présentée dans cet article est par endroits délicate et calculatoire. On présente ici une preuve évitant ces calculs, basée sur le lemme suivant.

Lemme 8.3 *La structure de module de Yoneda de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{2^k} \circ S^{2^h})$ *est triviale.*

Démonstration.
Comme $S^{2^k} \circ S^{2^h}$ est un facteur direct de $(S^2)^{\circ(h+k)}$, il suffit de montrer que pour tout ℓ, la structure de module de Yoneda de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, (S^2)^{\circ \ell})$ est triviale, ce qu'on montre par récurrence sur ℓ. Le point de départ est le calcul effectué dans [14] de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(k+1)}, S^{2^k} \circ S^2)$. On y montre notamment que sa structure de module est triviale.

Cela implique que le résultat est vrai pour $\ell = 1, 2$. Supposons qu'il est vrai pour ℓ. Les théorèmes 7.1 et 7.3 fournissent alors un isomorphisme *de modules de Yoneda*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(\ell+1)}, (S^2)^{\circ(\ell+1)}) \cong \\ &\quad \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(1)}, S^2) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(\ell)}, (S^2)^{\circ \ell}) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(\ell+1)}, S^{2^\ell} \circ S^2). \end{aligned}$$

L'action de Yoneda sur le produit tensoriel est l'action sur le troisième facteur. Cette action est nulle d'après [14]. □

Remarque 8.4 D'après le théorème 1.10, le lemme 8.3 permet de décrire complètement les *modules* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (S^{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{2^k} \circ S^{2^h})$.

Démonstration de la proposition 8.1.

On note pour simplifier $\mathbf{I}$ et $\mathbf{II}$ les deux suites spectrales d'hypercohomologie ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{I}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^{\bullet}_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$ et ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{II}(\mathrm{Id}^{(h+k+r)}, (\mathcal{S}^{\bullet}_{2^k} \circ S^{2^h})^{(r)})$.

Soit $\ell < k$, et t un entier dont le quotient par la division euclidienne par 2^{h+k} est pair. Soit d la différentielle (de rang $2^k - 2^\ell + 1$) issue de la ligne 2^k de but $(t, 2^\ell)$:

$$d \;:\; \mathbf{II}^{s,2^k} \longrightarrow \mathbf{II}^{t,2^\ell}.$$

La structure de module de Yoneda de la suite spectrale $\mathbf{II}$ donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{II}^{s,2^k} \arrow[rr, "\cdot e_{h+k}"] \arrow[dr, "d"] & & \mathbf{II}^{s+2^{h+k},2^k} \arrow[dr, "d"] & \\
& \mathbf{II}^{t,2^\ell} \arrow[rr, "\cdot e_{h+k}"] & & \mathbf{II}^{t+2^{h+k},2^\ell}.
\end{tikzcd}$$

D'après la remarque 8.4 et le théorème 1.9, l'action de e_{h+k} donne un isomorphisme entre $\mathbf{II}_2^{t,2^\ell}$ et $\mathbf{II}_2^{t+2^{h+k},2^\ell}$. Par un argument de récurrence sur le rang de d, cela reste un isomorphisme au rang considéré dans le diagramme ci-dessus : le morphisme du bas est un isomorphisme. Par le lemme 8.3, le morphisme du haut est nul. Ainsi, pour que le carré soit commutative, la différentielle de gauche doit être nulle.

Soit maintenant t un entier dont le quotient par la division euclidienne par 2^{h+k} est impair, et considérons l'action de e_{h+k} dans $\mathbf{II}$. Comme précédemment, elle réalise une bijection

$$\mathbf{II}^{t-2^{h+k},2^\ell} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{II}^{t,2^\ell} \tag{24}$$

en rang $2^{k-1}+1$. Supposons que $\mathbf{II}_\infty^{t,2^\ell}$ est non nul. Par l'argument précédent,

$$\mathbf{II}^{t-2^{h+k},2^\ell}_{2^{k-1}+1} = \mathbf{II}^{t-2^{h+k},2^\ell}_\infty.$$

Ainsi, l'isomorphisme (24) induit une action non nulle de e_{h+k} dans l'aboutissement. Comme l'aboutissement est égal à $\mathrm{Ext}^{*-1}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+k)}, S^{2^k} \circ S^{2^h})$ en tant que module, cela contredit le lemme 8.3. Ainsi

$$\mathbf{II}^{t,2^\ell}_\infty = 0.$$

Comme la seule différentielle non nulle de rang supérieur ou égal à $2^{k-1}+1$ de source ou de but $\mathbf{II}^{t,2^\ell}$ est celle issue de la ligne 2^k, celle-ci doit être surjective. □

Remarque 8.5 Dans cette démonstration, le seul endroit où on utilise de manière cruciale le théorème 1.11 est lors du calcul de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+1)}, S^{2^h} \circ S^2)$, exposé dans [14]. Il y a moyen de faire les compositions dans l'autre sens, mais il existe toujours un endroit dans la preuve où on utilise le théorème 1.11. Cette présentation semble la plus économique de ce point de vue.

Remarque 8.6 Cette démonstration ne s'adapte pas facilement au cas où p est impair, car dans ce cas, ainsi qu'on l'a montré dans [14], les structures de modules de Yoneda de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+1)}, S^p \circ S^{p^h})$ et de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h+1)}, S^{p^h} \circ S^p)$ sont non triviales.

Notons enfin que les théorèmes 7.1, 7.3, 8.2 et le lemme 8.3 permettent de déterminer des groupes d'extensions similaires faisant intervenir un nombre quelconque de compositions de puissances symétriques. Une récurrence immédiate sur ℓ donne le corollaire suivant :

Corollaire 8.7 *La série de Poincaré* $\varphi_{h_1,\dots,h_\ell}$ *de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h_1+\dots+h_\ell)}, S^{2^{h_\ell}} \circ \dots \circ S^{2^{h_1}})$ *est donnée par*

$$\varphi_{h_1,\dots,h_\ell}(t) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{h_1+\dots+h_\ell}(1-t^{2^i-1})}{\displaystyle\prod_{i=1}^{h_1}(1-t^{2^i-1}) \ \cdots \ \prod_{i=1}^{h_\ell}(1-t^{2^i-1})}.$$

Sa structure de module de Yoneda est triviale. On en déduit aussi des descriptions des modules de Yoneda $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(h_1+\dots+h_\ell+r)}, (S^{h_\ell} \circ \dots \circ S^{h_1})^{(r)})$ *et* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^{h_\ell} \circ \dots \circ S^{h_1})$.

Références

[1] S. Betley et T. Pirashvili, *Stable K-theory as a derived functor*, J. of Pure and Applied Alg. **96** (1994), 245–258, Appendice de T. Pirashvili.

[2] H. Cartan, *Algèbre d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, Séminaire Cartan 1954/55.

[3] H. Cartan et S. Eilenberg , *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[4] V. Franjou, E. Friedlander , A. Scorichenko et A. Suslin , *General linear and functor cohomology over finite fields*, Ann. of Math. **150** (1999), no. 2, 663–728.

[5] V. Franjou, J. Lannes et L. Schwartz, *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis*, Invent. Math. **115** (1994), 513–538.

[6] E. Friedlander et A. Suslin , *Cohomology of finite group schemes over a field*, Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 209–270.

[7] H.-W. Henn, J. Lannes et L. Schwartz, *Analytic functors, unstable algebras and cohomology of classifying spaces*, Alg. Top. Proc. **96** (1989), 197–220, Northwestern University, Cont.

[8] J. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, Acad. Press Inc., 1987.

[9] M. Jibladze et T. Pirashvili, *Cohomology of algebraic theories*, J. of algebra **137** (1991), 253–296.

[10] N. Kuhn, *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra I*, Amer. J. of Math. **116** (1994), 327–360.

[11] T. Pirashvili, *Vanishing of* Ext-*groups in functor category*, Preprint, Bonn MPI **91-19**.

[12] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, The Univ. of Chicago Press, 1994.

[13] A. Troesch, *Cohomologie de compositions de puissances symétriques*, CR Acad. Sci. Paris **333** (2001), 509–512.

[14] A. Troesch, *Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques*, Comm. in Algebra (À paraître).

[15] A. Troesch, *Cohomologie de compositions de puissances symétriques en caractéristique 2*, Prépublication du LAGA (Paris 13), no. 2002-12.

[16] A. Troesch, *Comparaison des modules d'extensions dans des catégories de foncteurs*, En préparation.

[17] Ch. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in andvanced mathematics, vol. 38, Cambridge Univ. Press, 1994.

LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13
99, avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse
France
e-mail : `troesch@math.univ-paris13.fr`