MU-cohomologie des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif

par François-Xavier Dehon[1]

Résumé : Nous montrons dans cet article que la MU-cohomologie continue des espaces fonctionnels de source le classifiant du groupe cyclique d'ordre p^n et de but le pro-p-complété d'un espace dont la cohomologie à coefficients dans les entiers p-adiques est sans torsion est l'image de la MU-cohomologie complétée en p de l'espace par un foncteur T_n analogue au foncteur T associé à la cohomologie modulo p du classifiant du groupe cyclique d'ordre p.

Mots clés : espaces fonctionnels, classes d'homotopie d'applications, foncteur T, espaces classifiants, MU-théorie, espaces profinis.

Abstract : We show in this paper that the continuous MU-cohomology of the mapping spaces from the classifying space of the cyclic group of order p^n to the pro-p-completion of a space whose p-adic cohomology is torsion free is the image of the p-completed MU-cohomology of the space by a functor T_n analogous to the functor T associated to the classifying space of the cyclic group of order p.

Keywords : mapping spaces, homotopy classes of maps, T-functor, classifying spaces, MU-theory, profinite spaces.

0. Introduction

Soient p un nombre premier fixé, n un élément de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et X un espace dont la cohomologie à coefficients dans l'anneau des entiers p-adiques est sans torsion ; on note $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ le classifiant du groupe cyclique d'ordre p^n si n est fini, du groupe colimite de la suite des inclusions $\mathbb{Z}/p^k \to \mathbb{Z}/p^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, sinon. Nous montrons dans cet article comment les propriétés d'exactitude de la cohomologie modulo p continue de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ mise en évidence dans [DL] permettent d'obtenir un foncteur T_n qui calcule la MU-cohomologie continue de cet espace fonctionnel.

Rappelons la théorie classique du foncteur T ([La1]) : On note $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ la catégorie des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p et $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p$ la cohomologie modulo p du classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. Le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$, $N \mapsto \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes N$ admet un adjoint à gauche noté T et le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel

[1] L'auteur a bénéficié pendant la réalisation de ce travail d'une bourse individuelle Marie Curie de la Commission européenne (HPMF-CT-1999-00135).

gradué sous-jacent à $\mathrm{T}N$ est "exact" en le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué sous-jacent à N. Disons qu'un espace Y est p-π_*-fini s'il est fibrant, si $\pi_0 Y$ est fini et si pour tout choix du point base les groupes d'homotopie $\pi_n Y$, $n \geq 1$, sont des p-groupes finis et sont triviaux pour n assez grand. Pour tout espace p-π_*-fini Y, l'évaluation $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \times \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, Y) \to Y$ induit un isomorphisme $\mathrm{TH}^*Y \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, Y)$ ([La1], [DS]).

Pour prendre en compte des espaces plus généraux que les espaces p-π_*-finis, nous utilisons la p-complétion profinie des espaces développée par Morel ([Mo2]) : A tout espace Y on associe un pro-objet $Y(-)$ à valeur dans la catégorie des ensembles finis simpliciaux fibrants et p-π_*-finis et un morphisme du pro-objet constant Y dans $Y(-)$ induisant un isomorphisme $\mathrm{colim}_i \mathrm{H}^*Y(i) \to \mathrm{H}^*Y$. L'isomorphisme entre $\mathrm{TH}^*Y(i)$ et $\mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, Y(i))$ s'étend alors immédiatement en un isomorphisme $\mathrm{TH}^*Y \to \mathrm{colim}\ \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, Y(-))$.

Notre travail est double : Nous définissons dans une première partie une catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ des MU-algèbres instables dans laquelle vit naturellement la MU-cohomologie continue des espaces profinis et étudions le lien entre la catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ et la catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$: Les objets M de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ ont une filtration naturelle décroissante par des MU^*-modules $\mathrm{f}^n M$, $n \in \mathbb{N}$, induite par une filtration de l'anneau de coefficients MU^* et le quotient $M/\mathrm{f}^1 M$ est un objet de $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$. Notons $\widehat{\mathcal{L}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des MU^*-modules filtrés formée des objets isomorphes au complété d'un MU^*-module libre pour la filtration par les coefficients ; les objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ apparaissent comme les objets projectifs pour la structure additive sous-jacente aux objets de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Le rôle joué par la catégorie $\widehat{\mathcal{L}}$ apparaît par les deux points suivants :

- Disons qu'un espace profini est sans p-torsion si sa cohomologie continue à coefficients dans l'anneau profini des entiers p-adiques est sans torsion ; le MU^*-module filtré sous-jacent à la MU-cohomologie continue d'un tel espace est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et la réciproque est très souvent vraie.
- Soit M une MU-algèbre instable dont le MU^*-module filtré sous-jacent est dans $\widehat{\mathcal{L}}$; alors toute résolution libre de M dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ induit, par réduction modulo f^1, une résolution de $M/\mathrm{f}^1 M$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$.

Nous construisons dans la seconde partie un foncteur T_n et une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \widehat{\otimes} N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{T}_n M, N) \ ,$$

où $-\widehat{\otimes}-$ désigne la somme dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Le foncteur T_∞ est l'adjoint à gauche du foncteur $N \mapsto \mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^\infty \widehat{\otimes} N$; les foncteurs $M \mapsto \mathrm{T}_n M$, $n < \infty$, sont plus mystérieux et sont construits géométriquement à l'aide du début de la résolution instable libre de M.

Pour tout espace profini X sans p-torsion, l'espace profini fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est encore sans p-torsion ([DL]) et l'évaluation $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X) \to X$ induit un morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$. Nous obtenons :

Théorème 0.1.

(a) *La restriction du foncteur* T_n *à* $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$ *est un endofoncteur de* $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$ *et le foncteur associé* $M \mapsto (\mathrm{T}_n M)/\mathrm{f}^1(\mathrm{T}_n M)$ *est exact en* $M/\mathrm{f}^1 M$.

(b) *Pour tout espace profini fibrant* X *sans* p*-torsion, l'application*

$$\mathrm{T}_n\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$$

est un isomorphisme.

Le point (a) s'obtient en comparant les foncteurs T_1 et T puis inductivement en montrant que le foncteur T_{n+1} est lié au foncteur T_n par une version équivariante de T_1 (de sorte qu'on mime algébriquement le lien entre les espaces fonctionnels de source $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$ et $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$). Le point (b) s'obtient à l'aide d'une MU-résolution cosimpliciale de l'espace profini X et en utilisant le point (a) et les propriétés d'exactitude du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué $\mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ en H^*X.

L'isomorphisme du point (b) conduit à une version p-complète du calcul des classes d'homotopie d'applications du classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif π dans le p-complété profini d'un espace (cf [DL]) : L'application

$$[\mathrm{B}\pi, \widehat{X}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}^*X, \mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi)$$

est une bijection lorsque X est sans p-torsion ($\mathrm{MU}^*(-)$ désignant la MU-cohomologie continue des espaces profinis ou la MU-cohomologie complétée en p des espaces).

Le point (a) du théorème montre que si $X \to X'$ est une application entre espaces sans p-torsion induisant une injection en cohomologie modulo p, alors toute application de $\mathrm{B}\pi$ dans $\widehat{X'}$ se relève en une application de $\mathrm{B}\pi$ dans $\widehat{X}$. Il montre plus généralement une propriété d'injectivité de la MU-cohomologie complétée en p du classifiant de π analogue à celle que possède la cohomologie modulo p d'un p-groupe abélien élémentaire ([La1]) et qui va dans le sens des résultats de Wilkerson sur la K-théorie complétée en p d'un tore.

Revenons sur la première partie. La structure d'algèbre instable sur la MU-cohomologie continue d'un espace profini est donnée par une monade sur la catégorie $\mathcal{E}$ns-gr des ensembles gradués. Précisons : On note $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ la catégorie homotopique des espaces profinis ([Mo2]) ; pour tout objet S de $\mathcal{E}$ns-gr, le foncteur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{E}\text{ns-gr}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(S, \mathrm{MU}^* X)$ est représentable (par définition) par un espace profini $\mathrm{K}(S)$ (les espaces profinis $\mathrm{K}(S)$ jouent pour la MU-cohomologie continue le rôle des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux en cohomologie modulo p). On note alors G la monade $S \mapsto \mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S)$ sur $\mathcal{E}$ns-gr ; la catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ est la catégorie des G-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr.

Les calculs de Wilson ([Wi]) montrent que les espaces profinis $\mathrm{K}(S)$ sont sans p-torsion. La MU-cohomologie continue d'un espace profini X apparaît alors canoniquement comme le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr du diagramme $\mathrm{G}^2(\mathrm{MU}^*X) \rightrightarrows \mathrm{G}(\mathrm{MU}^*X)$ de $\widehat{\mathcal{L}}$. On en déduit une structure additive sur MU^*X qui conduit à une sous-catégorie abélienne $\widehat{\mathcal{M}}$ de la catégorie des MU^*-modules analogue pour la filtration de l'anneau MU^* à la catégorie des groupes abéliens Ext-p-complets pour la filtration p-adique. C'est dans cette catégorie $\widehat{\mathcal{M}}$ qu'on définit un produit tensoriel permettant d'obtenir une formule de Künneth pour la MU-cohomologie continue d'un produit.

Nous consacrons une large part de la première partie à l'étude de l'algèbre homologique relative au produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{M}}$. Nous suivons en particulier les pas de Adams ([Ad2]) et Conner-Smith ([CS]) pour obtenir les suites spectrales de Künneth et de coefficients universelles pour la MU-cohomologie continue des espaces profinis de dimension finie. Des arguments de passage à la limite, utilisés notamment dans [Lan] et [RWY], permettent d'étendre les résultats aux espaces profinis quelconques.

Voici maintenant le plan de l'article :

1.1. Théorie homotopique des espaces profinis

Nous rappelons dans cette section la structure de catégorie de modèles fermée définie par Morel sur la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ des espaces profinis. Nous discutons ensuite des objets fonctionnels dans $\widehat{\mathcal{S}}$, de la filtration squelettale d'un espace profini et de la suite exacte de Milnor associée, de la suite spectrale de Serre convergeant vers la cohomologie continue de la construction de Borel associée à l'action d'un pro-p-groupe abélien simplicial, enfin de la cohomologie continue sur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ associée à une théorie cohomologique sous certaines hypothèses de finitude portant sur les espaces de lacets infinis la représentant.

1.2. Structure additive de la MU-cohomologie continue des espaces profinis

L'étude de la structure additive de la MU-cohomologie continue des espaces profinis, qui précise la structure de MU^*-module, se fait en deux étapes. Nous nous spécialisons d'abord aux espaces profinis sans p-torsion. Cette étape est essentielle, d'abord parce que les espaces profinis représentant la MU-cohomologie continue sont sans p-torsion, ensuite parce que la cohomologie modulo p continue des espaces profinis sans p-torsion se déduit de leur MU-cohomologie continue par une formule de coefficients universels et qu'on dispose d'une formule de Künneth. La catégorie $\widehat{\mathcal{L}}$ se comporte à bien des égards comme la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués, si ce n'est que les limites et colimites n'existent pas en général dans $\widehat{\mathcal{L}}$.

La seconde étape consiste à décrire les objets à présentation dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Un tel objet apparaît comme une algèbre sur une certaine monade $\widehat{\mathrm{L}}$ de $\mathcal{E}$ns-gr. La catégorie $\widehat{\mathcal{M}}$ est la catégorie des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr ; elle est abélienne. Une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre hérite naturellement d'une structure de MU^*-module filtré mais ne s'y réduit pas parce que sa filtration n'est pas nécessairement complète.

1.3. Structure d'algèbre instable

Le point essentielle de cette section est que la réduction modulo f^1 induit un foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$. Nous l'utilisons pour interpréter l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}^*X, \mathrm{MU}^*\mathrm{pt})$ comme l'ensemble $\pi_0 X$ lorsque X est fibrant et sans p-torsion.

1.4. Résolutions

Le but de cette section est d'obtenir des suites spectrales qui montrent comment le cas des espaces profinis quelconques est relié en MU-cohomologie à celui des espaces profinis sans p-torsion (cf [Ad2], [CS]). C'est également dans cette section que nous énonçons les propriétés d'exactitude du produit tensoriel par la MU-cohomologie complétée en p de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ dont nous avons besoin pour l'analyse des foncteurs T_n.

Nous étudions d'abord les dérivés $\mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(-,-)$ du produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{M}}$ et les relions aux foncteurs Tor_n associés au produit tensoriel classique des $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules. Nous montrons que les objets de $\widehat{\mathcal{M}}$ de présentation en degré borné admettent une résolution libre de longueur finie (on en déduira que les espaces profinis de dimension finie admettent une résolution libre de longueur finie).

Nous étudions également le comportement de ces foncteurs dérivés avec les limites inverses et en déduisons l'exactitude du produit tensoriel par une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre libre sous certaines hypothèses de finitude.

Nous introduisons enfin les MU-résolutions des espaces profinis par des espaces profinis sans p-torsion et les suites spectrales associées et illustrons leur utilisation par la généralisation des formules de Künneth et des coefficients universels.

1.5. Conclusion

Nous concluons cette première partie en montrant que l'analyse classique de la cohomologie modulo p continue des espaces profinis fonctionnels $\mathbf{hom}(X, Y)$ (cf [La1]), pour X un espace dont la cohomologie modulo p est finie en chaque degré, se reproduit en MU-cohomologie continue dans le cas idéal où l'espace X est sans p-torsion : le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, $N \mapsto \mathrm{MU}^*X \widehat{\otimes} N$ admet un adjoint à gauche $(- : \mathrm{MU}^*X)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$ et l'évaluation $X \times \mathbf{hom}(X, Y) \to Y$ induit un morphisme $(\mathrm{MU}^*Y : \mathrm{MU}^*X)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(X, Y)$ qui est un isomorphisme lorsque Y est isomorphe à l'espace $\mathrm{K}(S)$ pour un ensemble gradué S. Nous n'obtenons pas par contre une telle adjonction lorsque X est le classifiant d'un p-groupe cyclique.

2.1. Propriétés de la cohomologie modulo p des espaces fonctionnels de source le classifiant de $\mathbb{Z}/p^n$ ou de S^1

Nous rappelons dans cette section les propriétés de la cohomologie modulo p continue des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ mises en évidence dans [DL].

2.2 Foncteurs T

Nous construisons les foncteurs T_n et montrons qu'ils sont liés les uns aux autres par une version équivariante du foncteur T_1 qui est aussi une version en MU-cohomologie continue du foncteur Fix ([La1, 4.4.3]). Nous montrons au passage que la MU-cohomologie $\widehat{\mathrm{S}}^1$-équivariante d'un espace profini sans p-torsion X muni d'une action de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ est un foncteur en la MU-cohomologie continue de X munie de la coaction de $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ (on peut très certainement montrer ce résultat sans restriction sur X).

2.3. Cohomologie des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif

Nous démontrons le théorème principal concernant la MU-cohomologie continue des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif et de but un espace profini fibrant sans p-torsion.

Ce théorème pourrait être vrai sans restriction sur l'espace au but. Nous montrons par exemple que c'est le cas lorsque le but est le classifiant d'un p-groupe abélien fini.

Ce travail reprend les résultats de la première partie de ma thèse et fait suite à [DL]. Qu'il me soit permis de remercier ici Jean Lannes pour son encadrement constant.

1. MU-cohomologie continue des espaces profinis

Nous appelons espace un ensemble simplicial (cf [BK, Chap. VIII]). Les espaces et leurs morphismes forment une catégorie qu'on note $\mathcal{S}$. Nous fixons par ailleurs un nombre premier p.

1.1. Théorie homotopique des espaces profinis

1.1.1. Rappel sur la p-complétion profinie (d'après [Mo2])

Ce paragraphe est une brève introduction aux objets que nous utilisons. Nous renvoyons à [Mo2] pour une exposition complète.

On note $\widehat{\mathcal{S}}$ la catégorie des ensembles profinis simpliciaux et des applications simpliciales continues. La sous-catégorie pleine $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$ de $\mathcal{S}$ formée des ensembles simpliciaux finis en chaque degré est aussi une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{S}}$. L'inclusion $\widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ (oubli de la topologie) admet un adjoint à gauche : le foncteur qui associe à un espace sa complétion profinie.

Rappelons qu'un pro-objet dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur d'une catégorie petite et filtrante dans $\mathcal{C}$ et qu'un morphisme entre deux pro-objets $X(-)$ et $Y(-)$ est un élément de l'ensemble $\lim_j \mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X(i), Y(j))$. Les pro-objets et leurs morphismes forment une catégorie pro-$\mathcal{C}$ (voir par exemple [Mo1, 1]).

Le foncteur de $\widehat{\mathcal{S}}$ dans pro-$\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$ qui associe à un ensemble profini simplicial X le pro-objet formé des ensembles finis simpliciaux X/R, R décrivant l'ensemble ordonné des relations simpliciales ouvertes de X, est une équivalence de catégories d'inverse le foncteur qui associe à un pro - ensemble fini simplicial $X(-)$ sa limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$.

Soit X un espace profini. On définit la cohomologie continue de X à coefficients dans un groupe abélien profini π comme l'homologie du complexe de cochaînes continues de X à valeur dans π. Lorsque π est fini et X est la limite d'un pro - ensemble fini simplicial $X(-)$, cette cohomologie est la colimite des cohomologies ordinaires des $X(i)$ à coefficients dans π.

La catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ possède une structure de catégorie de modèles fermée avec pour cofibrations les applications (continues) injectives et pour équivalences faibles les applications induisant un isomorphisme en cohomologie modulo p continue. Tout objet de $\widehat{\mathcal{S}}$ est cofibrant. Les objets fibrants sont les espaces profinis X tels que l'application de X dans le point a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations qui sont des équivalences faibles. On note $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ la catégorie homotopique associée.

Soit X un espace. La cohomologie modulo p de X s'identifie canoniquement à la cohomologie modulo p continue du complété profini $\widehat{X}^{\mathrm{f}}$ de X de sorte que la complétion profinie $\mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$ préserve les équivalences faibles. On vérifie que pour tout espace profini fibrant Y, la bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\widehat{X}^{\mathrm{f}}, Y)$ induit une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{S}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\widehat{X}^{\mathrm{f}}, Y)$.

Le complété profini $\widehat{X}^{\mathrm{f}}$ n'est pas nécessairement fibrant dans $\widehat{\mathcal{S}}$ mais possède, comme tout espace profini, une résolution fibrante canonique : On note $\widehat{X}(-)$ le pro-objet formé des tronqués de Postnikov des espaces totaux partiels des $\mathbb{F}_p$-résolutions cosimpliciales canoniques des quotients finis simpliciaux de X. (Lorsque X est un ensemble fini simplicial, la limite dans $\mathcal{S}$ de ce pro-objet est la p-complétion de Bousfield-Kan de X.) Chaque espace $\widehat{X}(i)$ est un p-espace fini, *i.e.*un ensemble fini simplicial fibrant dans $\widehat{\mathcal{S}}$ dont les groupes d'homotopie sont, pour tout choix du point base, des p-groupes finis, triviaux sauf pour un nombre fini d'entre eux. Le morphisme canonique du pro-objet constant X dans $\widehat{X}(-)$ induit un isomorphisme en cohomologie modulo p continue. On appelle $\widehat{X}(-)$ le pro-p-complété de X ; sa limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ est fibrante.

Comme la catégorie $\mathcal{S}$, la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ possède un analogue pointé $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. Un objet de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ est la donnée d'un morphisme $\mathrm{pt} \to X$ dans $\widehat{\mathcal{S}}$, où pt est l'ensemble simplicial constant égal au point. Un morphisme de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ est un morphisme de $\widehat{\mathcal{S}}$ respectant le point base. On observera qu'un espace profini non vide peut toujours être pointé et que l'oubli du point base $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}} \to \widehat{\mathcal{S}}$ admet un adjoint à gauche : le foncteur qui associe à un espace profini X la réunion disjointe de X et d'un point base, qu'on note X_+.

On note $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ la catégorie homotopique associée à $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$.

1.1.2. Limites et colimites homotopiques dans $\widehat{\mathcal{S}}$

Objets fonctionnels

Soit W un ensemble fini simplicial. Rappelons que l'objet fonctionnel $Y \mapsto \mathbf{hom}(W,Y)$ est l'adjoint à droite dans $\mathcal{S}$ du foncteur $Z \mapsto W \times Z$. Lorsque Y est un espace profini, l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(W,Y)$ est naturellement profini et comme tel l'adjoint à droite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ en Y du foncteur $Z \mapsto W \times Z$. On a donc une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(W \times Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(Z, \mathbf{hom}(W,Y)) \ .$$

Plus généralement soit X un espace profini. Il existe un ensemble simplicial $\mathbf{hom}(X,Y)$ caractérisé par la bijection

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X \times W, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(W, \mathbf{hom}(X,Y))$$

naturelle en $W \in \mathcal{S}_{\mathrm{f}}$, X et Y, et faisant de $\widehat{\mathcal{S}}$ une catégorie de modèles fermée simpliciale.

On vérifie que lorsque Y est fibrant les bijections précédentes induisent des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(W \times Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(Z, \mathbf{hom}(W,Y))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X \times W, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{S}}(W, \mathbf{hom}(X,Y))$$

Lorsque W, X et Y sont pointés, les objets fonctionnels $\mathbf{hom}(W,Y) \in \widehat{\mathcal{S}}$ et $\mathbf{hom}(X,Y) \in \mathcal{S}$ admettent des versions pointées : Notons, pour Z un espace profini pointé, $W \vee Z$ la somme de W et de Z au dessous du point et $W \wedge Z$ le quotient $(W \times Z)/(W \vee Z)$ (c'est un espace profini pointé). Les objets fonctionnels $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(W,Y)$ et $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X,Y)$ sont caractérisés par les bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(W \wedge Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(Z, \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(W,Y))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(X \wedge W, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(W, \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X,Y))$$

qui induisent encore des bijections naturelles entre les ensembles de morphismes des catégories homotopiques correspondantes lorsque Y est fibrant. L'adjonction entre $\widehat{\mathcal{S}}$ et $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ induit, pour tout espace profini X, un isomorphisme canonique $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X_+,Y) \simeq \mathbf{hom}(X,Y)$ entre ensembles simpliciaux (entre ensembles profinis simpliciaux si X est un ensemble fini simplicial).

Remarque. Soit Y un espace profini pointé et W un ensemble simplicial pointé quelconque. L'espace W est alors la colimite filtrante de ses sous

- ensembles finis simpliciaux pointés et l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}_{\rm pt}(W,Y)$ dans $\mathcal{S}_{\rm pt}$, qui s'identifie à l'espace $\mathbf{hom}_{\rm pt}(\widehat{W}^{\rm f},Y)$, est naturellement profini.

Notons S le quotient du simplexe standard I de dimension 1 par son bord ; c'est un ensemble fini simplicial équivalent faiblement au groupe abélien simplicial S^1 mais qui n'est pas fibrant dans $\mathcal{S}$ ($\pi_1\mathrm{S}^1$ est infini). Pour X et Y des espaces profinis pointés avec Y fibrant, on note ΣX l'espace profini pointé $\mathrm{S}\wedge X$ et ΩY l'espace profini pointé fibrant $\mathbf{hom}_{\widehat{\mathcal{S}}_{\rm pt}}(\mathrm{S},Y)$. On a donc une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\rm pt}}(\Sigma X,Y)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\rm pt}}(X,\Omega Y)$ qui est un isomorphisme de groupes pour la structure de co-H-espace de S.

Limites et colimites homotopiques

Bousfield et Kan ([BK, chap. XI]) décrivent la limite homotopique $\mathrm{holim}\triangle$ d'un diagramme d'espaces $\triangle(-)$ indexé par une petite catégorie $\mathcal{I}$ comme l'égalisateur dans $\mathcal{S}$ du diagramme

$$\prod_{i\in\mathcal{I}}\mathbf{hom}(\mathcal{I}/i,\triangle(i)) \rightrightarrows \prod_{i\to i'\in\mathcal{I}}\mathbf{hom}(\mathcal{I}/i,\triangle(i'))$$

où $\mathcal{I}/i$ désigne le nerf de la catégorie des objets de $\mathcal{I}$ au dessus de i (qui est contractible).

Lorsque $\triangle(-)$ est un diagramme d'espaces profinis fibrants, les espaces $\mathbf{hom}(\mathcal{I}/i,\triangle(j))$ sont naturellement profinis et fibrants donc par construction l'espace $\mathrm{holim}\triangle$ aussi. On l'appelle la limite homotopique du diagramme $\triangle(-)$ dans $\widehat{\mathcal{S}}$.

Lorsque $\triangle(-)$ est un diagramme d'espaces profinis pointés, sa limite homotopique est naturellement pointée. On vérifie sans peine que pour tout espace profini pointé X, l'espace $\mathbf{hom}_{\rm pt}(X,\mathrm{holim}\triangle)$ s'identifie à l'espace $\mathrm{holim}_i\mathbf{hom}_{\rm pt}(X,\triangle(i))$. Supposons chaque $\triangle(i)$ fibrant dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\rm pt}$ et soit $\varphi : X\to \mathrm{holim}\triangle$ un point base de l'espace $\mathbf{hom}_{\rm pt}(X,\mathrm{holim}\triangle)$. On dispose de la suite spectrale de Bousfield-Kan ([BK, chap. XI, sect. 7]) de terme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_2^{s,t} &= \lim{}_i{}^s\pi_t\mathbf{hom}_{\rm pt}(X,\triangle(i)), 0\le s\le t \\ &\simeq \lim{}_i{}^s\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\rm pt}}(\Sigma^tX,\triangle(i))\text{si } \varphi \text{ est l'application triviale} \end{aligned}$$

qui aboutit, pour $t-s>0$, au groupe $\pi_{t-s}\mathrm{holim}_i\mathbf{hom}_{\rm pt}(X,\triangle(i))$ ($=\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\rm pt}}(\Sigma^{t-s}X,\mathrm{holim}\triangle)$ si φ est l'application triviale). Elle converge en degré $t-s>0$ lorsque par exemple les dérivés $\lim^s$ sont uniformément nuls pour s assez grand. En particulier, lorsque $\triangle(-)$ est isomorphe dans pro-h$\mathcal{S}$ à une tour d'espaces, les termes $\lim^s$ sont triviaux pour $s\ge 2$ et la suite spectrale se réduit, pour $t-s>0$ et lorsque φ est l'application triviale, à la suite exacte de groupes

$$
\begin{aligned}
* \to \lim_i{}^1 \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^{t-s+1}X, \triangle(i)) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^{t-s}X, \operatorname{holim}\triangle) \\
\to \lim_i \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^{t-s}X, \triangle(i)) \to *.
\end{aligned}
$$

Les deux exemples suivants sont fondamentaux :

– Soit $Y(-)$ un pro - p-espace fini (le pro-p-complété d'un espace profini par exemple) et prenons $\triangle(-) = Y(-)$; notons $\mathcal{I}$ sa catégorie (filtrante) index et Y la limite de $Y(-)$ dans $\widehat{\mathcal{S}}$. Les applications $Y(j) \to \mathbf{hom}(\mathcal{I}/i, Y(j))$ induites par les applications canoniques $\mathcal{I}/i \to \mathrm{pt}$ sont des équivalences d'homotopie dans $\widehat{\mathcal{S}}$. On en déduit que l'application $Y \to \operatorname{holim}_i Y(i)$ est une équivalence faible dans $\widehat{\mathcal{S}}$, forte lorsque Y est fibrant. Soit X la limite dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ d'un pro - ensemble fini simplicial pointé $X(-)$; la suite spectrale de Bousfield et Kan relie l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^{t-s}X, Y)$ avec les termes $\lim_i^s \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^t X, Y(i)) = \lim_i^s \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^t X(j), Y(i))$ qui sont non triviaux en général. Cependant lorsque $X(-)$ est le complété profini d'un espace (pointé), les ensembles $\operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma^t X, Y(i))$ sont naturellement profinis et l'application

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(X, Y) \to \lim_i \operatorname*{colim}_j \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(X(j), Y(i)) \\
= \operatorname{Hom}_{\text{pro-h}\mathcal{S}}(X(-), Y(-))
\end{aligned}
$$

est une bijection (cf la proposition 1.1.3 de [DL]).

– Soient W et Y des espaces profinis et φ une application $W \to Y$. Notons $\mathrm{Sk}_n W$ le sous-ensemble profini simplicial de W engendré par les simplexes non dégénérés de degré inférieur ou égal à n et prenons pour $\triangle(-)$ la tour formée des espaces $\mathbf{hom}(\mathrm{Sk}_n W, Y)$ pointé par l'application φ, et pour X le simplexe standard de dimension 0. On obtient la suite exacte d'ensembles pointés (de groupes si Y est un espace de lacets et φ est l'application triviale)

$$
\begin{aligned}
* \to \lim_n{}^1 \pi_1(\mathbf{hom}(\mathrm{Sk}_n W, Y), \varphi) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(W, Y) \\
\to \lim_n \operatorname{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{Sk}_n W, Y) \to (\varphi_n),
\end{aligned}
$$

où φ_n est la restriction de φ au squelette n-ième de W ; cf [BK, chap. IX, §3].

On définit de façon duale la colimite homotopique d'un diagramme de $\widehat{\mathcal{S}}$. Cette fois le foncteur oubli $\widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ ne commute pas à la colimite homotopique, sauf lorsque la catégorie index du diagramme est finie. La cofibre d'une application en est un cas particulier que nous détaillons.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ (on peut toujours ajouter à X et Y un point base). On note M_f la somme de Y et de $(X \times \mathrm{I})/(\mathrm{pt} \times \mathrm{I})$ au dessous de $X \times \{0\}$, où I désigne le simplexe standard de dimension 1 ayant pour 0-simplexes la paire $\{0, 1\}$; on note enfin C_f le quotient $\mathrm{M}_f/(X \times \{1\})$ qu'on appelle la cofibre de f ; c'est un espace profini pointé.

On dispose d'une application canonique de la cofibre de l'application $Y \to \mathrm{C}_f$ dans ΣX qui est une équivalence faible de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. Exactement comme dans $\mathrm{h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}$, on dispose alors pour tout espace profini fibrant pointé E d'une suite exacte de Puppe

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(X, E) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(Y, E) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\mathrm{C}_f, E) \leftarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma X, E) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(\Sigma Y, E) \leftarrow \cdots .\end{aligned}$$

1.1.3. Action d'un pro-p-groupe abélien simplicial

Soit π un pro-p-groupe abélien simplicial ; la construction classique du classifiant de π fournit une suite exacte de pro-p-groupes abéliens simpliciaux $0 \to \pi \to \mathrm{E}\pi \to \mathrm{B}\pi \to 0$. L'espace profini $\mathrm{B}\pi$ est en particulier fibrant dans $\widehat{\mathcal{S}}$ et l'application $\mathrm{E}\pi \to \mathrm{B}\pi$ est une fibration principale de groupe π (voir [Mo2, 1.5]).

Soit X un espace profini muni d'une action de π (X est muni d'une application $\pi \times X \to X$ dans $\widehat{\mathcal{S}}$ vérifiant les axiomes d'une action). On définit l'espace profini $X_{\mathrm{h}\pi}$ comme la construction de Borel $\mathrm{E}\pi \times_\pi X$ (le quotient de $\mathrm{E}\pi \times X$ par l'action diagonale de π). Lorsque π est discret, $X_{\mathrm{h}\pi}$ s'identifie à la colimite homotopique du diagramme formé du seul espace profini X et des morphismes induits par les éléments de π. On vérifie que si X est fibrant l'application $X_{\mathrm{h}\pi} \to \mathrm{B}\pi$ est une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$ de fibre X et on dispose d'une équivalence faible π-équivariante du produit fibré $\mathrm{E}\pi \times_{\mathrm{B}\pi} X_{\mathrm{h}\pi} = \mathrm{E}\pi \times X$ (avec action principale de π) dans X.

Inversement soit $Y \to \mathrm{B}\pi$ une fibration dans $\widehat{\mathcal{S}}$ de fibre X ; alors le produit fibré $\mathrm{E}\pi \times_{\mathrm{B}\pi} Y$ est muni d'une action principale de π et l'application induite $\mathrm{E}\pi \times_\pi (\mathrm{E}\pi \times_{\mathrm{B}\pi} Y) \to Y$ est une équivalence faible entre espaces profinis au dessus de $\mathrm{B}\pi$. Cette dernière induit une équivalence faible $\mathrm{E}\pi \times_{\mathrm{B}\pi} Y \to X$; on dira par abus que X est muni d'une action de π.

On définit dualement l'espace des points fixes homotopiques $X^{\mathrm{h}\pi}$ comme l'espace des points fixes de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi, X)$ pour l'action de π à la source et au but (l'espace des applications π-équivariantes de $\mathrm{E}\pi$

dans X). Il n'est pas profini *a priori* ; cependant lorsque π est un p-groupe abélien fini simplicial, l'espace $\mathrm{E}\pi$ l'est également et l'espace des points fixes homotopiques est naturellement profini. Lorsque π est discret (donc un p-groupe abélien fini), l'espace profini $X^{\mathrm{h}\pi}$ s'identifie à la limite homotopique du diagramme formé du seul espace profini X et des morphismes induits par les éléments de π.

L'espace des points fixes homotopiques $X^{\mathrm{h}\pi}$ s'interprète comme la fibre en l'identité de la fibration (de $\widehat{\mathcal{S}}$ si π est un p-groupe abélien fini simplicial, de $\mathcal{S}$ sinon) $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, X_{\mathrm{h}\pi}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{B}\pi)$; cf [LA1, 4.2].

Suite spectrale de Serre associée à une fibration de $\widehat{\mathcal{S}}$

Soit π un p-groupe abélien fini et $E \to B$ une fibration de $\widehat{\mathcal{S}}$. La construction de Dress [DR] de la suite spectrale de Serre fournit une suite spectrale pour la cohomologie continue à coefficients dans π : Notons $E_{s,t}$ l'ensemble des diagrammes commutatifs dans $\widehat{\mathcal{S}}$

$$\begin{array}{ccc} \triangle[s] \times \triangle[t] & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \triangle[s] & \to & B \end{array}$$

où $\triangle[s]$ désigne le simplexe standard de dimension s et $\triangle[s] \times \triangle[t] \to \triangle[s]$ est la projection sur le premier facteur. La structure cosimplicial sur l'ensemble des $\triangle[s]$ induit une structure d'ensemble profini bisimplicial sur $(E_{s,t})_{s,t}$. On définit la suite spectrale de Serre de la fibration $E \to B$ en cohomologie continue à coefficients dans π comme la suite spectrale classique associée au complexe double des cochaînes continues de $E_{\bullet,\bullet}$ à coefficients dans le groupe discret π. La suite spectrale est du premier cadrant avec une différentielle d_r de bidegré $(r, 1-r)$, $r \geq 1$ (donc fortement convergeante) ; Son terme $\mathrm{E}_2^{s,t}$ s'identifie comme dans le cas classique à la cohomologie continue de B à coefficients dans le système local de coefficients discrets formé par la cohomologie continue de la fibre à coefficients dans π (l'hypothèse π discret ne sert qu'à faciliter cette identification).

Nous nous en servirons pour démontrer des propriétés de la cohomologie modulo p continue de la construction de Borel associée à une action du classifiant d'un p-groupe abélien fini sur un espace profini.

1.1.4. Cohomologie continue des espaces profinis

Soit M le Ω-spectre d'une théorie cohomologique multiplicative sur $\mathcal{S}$. On dispose donc d'une suite d'espaces pointés M_n, $n \in \mathbb{Z}$, d'équivalences d'homotopie $M_n \to \Omega M_{n+1}$ et d'applications $M_n \times M_m \to M_{n+m}$, etc. faisant de la suite des M_n un objet en anneau commutatif gradué de $\mathrm{h}\mathcal{S}$.

On suppose que le spectre M est connexe, *i.e.*que les espaces M_n sont $(n-1)$-connexes pour tout $n \geq 0$, et que la cohomologie modulo p des espaces M_n est de dimension finie en chaque degré pour tout $n \geq 1$. On note enfin pour tout $n \geq 1$ $\widehat{M_n}(-)$ le pro-p-complété de l'espace M_n qu'on identifie avec sa limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$; c'est un espace profini fibrant et pointé.

Lemme 1.1.4.1.

- *Soit X un espace simplement connexe dont la cohomologie modulo p est finie en chaque degré ; alors le morphisme naturel $(\Omega X)\widehat{\ }(-) \to \Omega\widehat{X}(-)$ est une équivalence d'homotopie (dans $\widehat{\mathcal{S}}$).*
- *Soient X et Y deux espaces dont la cohomologie modulo p est finie en chaque degré ; alors le morphisme naturel $(X \times Y)\widehat{\ }(-) \to \widehat{X}(-) \times \widehat{Y}(-)$ est une équivalence d'homotopie compatible avec l'échange des facteurs de sorte qu'on dispose d'un isomorphisme $\widehat{X}(-) \times \widehat{Y}(-) \to (X \times Y)\widehat{\ }(-)$ dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ compatible avec l'échange des facteurs.*

Démonstration. Pour le premier point on montre que le morphisme du pro-espace constant ΩX dans $\Omega\widehat{X}(-)$ induit un isomorphisme en cohomologie modulo p continue en comparant les suites spectrales d'Eilenberg-Moore colimites qui convergent parce que les cohomologies des espaces qui interviennent sont sans action du π_1. Le second point s'obtient en comparant les formules de Künneth pour $X \times Y$ et pour $\widehat{X}(-) \times \widehat{Y}(-)$. Voir aussi [BK, ch. VI, prop. 6.5]. $\square$

Le lemme indique que pour tout entier $n \geq 1$ le morphisme naturel $\widehat{M_n}(-) \to \Omega\widehat{M_{n+1}}(-)$, composé des morphismes $\widehat{M_n}(-) \to (\Omega M_{n+1})\widehat{\ }(-)$ et $(\Omega M_{n+1})\widehat{\ }(-) \to \Omega\widehat{M_{n+1}}(-)$, est une équivalence d'homotopie dans $\widehat{\mathcal{S}}$. Ce n'est plus vrai pour $n = 0$ si M_0 a une infinité de composantes connexes : la cohomologie modulo p continue du second est de cardinal dénombrable alors que celle du premier est profinie.

Pour $n \leq 0$, on définit inductivement $\widehat{M_n}(-)$ comme l'espace profini de lacets $\Omega\widehat{M_{n+1}}(-)$.

La structure d'objet en anneau commutatif gradué de la suite (M_n) dans $\mathrm{h}\mathcal{S}$ induit une structure d'objet en anneau commutatif gradué sur la suite $(\widehat{M_n}(-))$ dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$.

Définition. On appelle M-cohomologie continue d'un espace profini X et on note M^*X l'anneau gradué $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \widehat{M_*}(-))$.

On note $\widehat{M}^*$ la M-cohomologie continue du point. Pour tout espace profini X, l'unique application $X \to \mathrm{pt}$ fait de M^*X une $\widehat{M}^*$-algèbre commutative unitaire. Si X est pointé, on note $\widetilde{M}^*X$ le noyau du morphisme de $\widehat{M}^*$-modules $M^*X \to \widehat{M}^*$ induit par l'application du point dans X (la M-cohomologie continue réduite de X). Le $\widehat{M}^*$-module M^*X est alors canoniquement la somme directe de $\widetilde{M}^*X$ et de $\widehat{M}^*$.

Remarques.

- Le foncteur défini sur $\mathrm{h}\mathcal{S}$ qui associe à un espace X la M-cohomologie continue du complété profini de X est une théorie cohomologique multiplicative sur $\mathrm{h}\mathcal{S}$ représentée par le Ω-spectre formé des limites $\widehat{M}_n$ des espaces profinis $\widehat{M}_n(-)$ dans $\mathcal{S}$. On l'appelle la M-cohomologie complétée en p et on la note $\widehat{M}^*-$.
- Le morphisme de spectre $M \to \widehat{M}$ induit au niveau des coefficients un isomorphisme $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M^* \to \widehat{M}^*$.

Exemples.

- Soient π un groupe abélien de type fini et $\mathrm{H}\pi$ le Ω-spectre formé des espaces d'Eilenberg- Mac Lane $\mathrm{K}(\pi, n)$. Alors la $\mathrm{H}\pi$-cohomologie continue d'un espace profini X coïncide avec la cohomologie continue de X à coefficients dans le groupe abélien profini $\lim_n \pi/p^n\pi$.
- Le Ω-spectre MU représentant le cobordisme complexe satisfait aux hypothèses faites sur le spectre M. Nous nous spécialiserons à cette théorie cohomologique dans la prochaine section.
- On peut définir la K-théorie continue d'un espace profini bien que le Ω-spectre représentant la K-théorie ne soit pas connectif (il est périodique) : Notons U la colimite des groupes unitaires U_n et BU la colimite des classifiants BU_n ; la donnée de $\widehat{\mathrm{U}}(-)$, de son espace de lacets (celui-ci s'identifie au pro-objet $\mathbb{Z}/p^{(-)} \times \widehat{\mathrm{BU}}(-)$) et de l'équivalence d'homotopie $\widehat{\mathrm{U}}(-) \to \Omega\Omega\widehat{\mathrm{U}}(-)$ définit un Ω-spectre périodique de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ dont le Ω-spectre de $\mathrm{h}\mathcal{S}$ sous-jacent représente la K-théorie complétée en p.

Remarque. La M-cohomologie continue est à valeur dans la catégorie des groupes abéliens. On peut également considérer des raffinements à valeur dans des pro-catégories : Le premier est le foncteur associant à un espace profini fibrant X la tour des M-cohomologies continues des squelettes de X et à un morphisme dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ le pro-morphisme induit entre les tours. On vérifie que ce foncteur définit une théorie cohomologique en observant que la tour des squelettes de la cofibre d'une application est homotopiquement pro-isomorphe à la tour des cofibres des applications induites entre les squelettes. Le second est le foncteur associant à un espace profini X le pro-objet en anneau formé des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \widehat{M}(i))$.

1.2. Structure additive de la MU-cohomologie continue des espaces profinis

1.2.1. MU*-modules filtrés libres sur un ensemble gradué et espaces profinis sans p-torsion

On note $\mathcal{M}$ la catégorie des MU*-modules.

Rappelons que l'anneau de coefficients MU* est une $\mathbb{Z}$-algèbre polynomiale en des générateurs x_n de degré $-2n$, n décrivant $\mathbb{N} - \{0\}$.

Soit n un entier positif ; on note $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*$ l'idéal $p^n\mathrm{MU}^{*\leq 0} + \cdots + p^0\mathrm{MU}^{*\leq -n}$ de MU*, où $\mathrm{MU}^{*\leq n}$ désigne l'idéal formé des éléments de degré inférieur ou égal à n. L'ensemble des $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*$ forme une filtration décroissante de MU*. L'idéal $\mathrm{f}^1\mathrm{MU}^*$ est le noyau du morphisme $\mathrm{MU}^* \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^* = \mathbb{Z}/p$ induit par l'orientation $\mathrm{MU} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}/p$ et les quotients $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^*$ sont des $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels gradués de dimension totale finie. Le complété de MU* pour cette filtration s'identifie à l'anneau de coefficients de la MU-cohomologie complétée en p.

Soit M un MU*-module ; la filtration de MU* induit une filtration naturelle sur M :

$$M = \mathrm{f}^0\mathrm{MU}^* \cdot M \supset \mathrm{f}^1\mathrm{MU}^* \cdot M \supset \cdots$$

qu'on appelle filtration par les coefficients. On dispose d'un morphisme canonique de M dans son complété $\widehat{M} = \lim_n M/(\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^* \cdot M)$. On observera que $\widehat{M}$ n'est pas nécessairement complet pour la filtration par les coefficients ; par exemple si M est un MU*-module libre, $\widehat{M}$ est complet si et seulement si M est nul en degré assez grand. Cependant $\widehat{M}$ possède une filtration plus grossière que la filtration par les coefficients définie par $\mathrm{f}^n\widehat{M} = \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/(\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^* \cdot M))$, qu'on appelle filtration limite de $\widehat{M}$ et pour laquelle $\widehat{M}$ est complet (cette filtration coïncide avec la filtration par les coefficients lorsque M est nul en degré assez grand). Observons que la structure de MU*-module sur M induit une structure naturelle de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module sur le complété $\widehat{M}$.

On note $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ la catégorie formée des MU^*-modules M munis d'une filtration décroissante

$$M = \mathrm{f}^0 M \supset \mathrm{f}^1 M \supset \cdots$$

plus grossière que la filtration par les coefficients (donc telle que les quotients $M/\mathrm{f}^n M$ sont des $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*$-modules) et des morphismes de MU^*-modules respectant la filtration, et $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ formée des objets complets pour la filtration. Ce sont des catégories additives.

Pour faire court, on notera M/f^n le quotient $M/\mathrm{f}^n M$ d'un objet M de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$.

LEMME 1.2.1.1. *Le foncteur de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ qui associe à un objet M son complété $\widehat{M}$ muni de la filtration limite est adjoint à gauche du foncteur "oubli de la filtration".*

On note enfin $\widehat{\mathcal{L}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ formée des objets isomorphes au complété d'un MU^*-module libre muni de la filtration limite. L'importance de la catégorie $\widehat{\mathcal{L}}$ pour notre propos viendra de ce que la MU-cohomologie continue d'un espace profini "sans p-torsion" est naturellement un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ (proposition 1.2.1.8 et corollaire 1.2.1.11). Les objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ sont caractérisés par le lemme suivant :

LEMME 1.2.1.2. *Soit M un objet de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$; alors M est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *L'objet M est complet pour sa filtration.*

(2) *Pour tout entier n, la surjection $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n \otimes_{\mathrm{MU}^*} M/\mathrm{f}^{n+1} \to M/\mathrm{f}^n$ est un isomorphisme.*

(3) *Pour tout entier n, la suite exacte $0 \to \mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \to \mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1} \to \mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n \to 0$ induit une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes_{\mathrm{MU}^*} M/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^{n+1} \to M/\mathrm{f}^n \to 0 \ .$$

Remarque. On observera que le terme $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes_{\mathrm{MU}^*} M/\mathrm{f}^1$ s'identifie au produit tensoriel de $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^*$ et de M/f^1 au dessus de $\mathbb{Z}/p$ via le morphisme canonique $\mathrm{MU}^* \to \mathbb{Z}/p$.

Démonstration du lemme. Soit L un MU^*-module libre. Les quotients $\widehat{L}/\mathrm{f}^n$ s'identifient par définition aux quotients $L/(\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^* \cdot L)$ d'où les propriétés (1), (2) et (3).

Réciproquement soit M un objet de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). Soit S une base du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué M/f^1 et L le MU^*-module libre de base S. L'application canonique $L \to M/\mathrm{f}^1$ se relève en un morphisme de MU^*-modules $L \to M$. La filtration de M étant plus grossière que la filtration par les coefficients, le morphisme $L \to M$ induit pour tout entier n un morphisme $L/(\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^* \cdot L) \to M/\mathrm{f}^n$. Ce dernier est un isomorphisme pour $n = 1$ donc un isomorphisme pour tout n par récurrence en utilisant la condition (3). Le morphisme $\widehat{L} \to M$ obtenu par passage à la limite est donc un isomorphisme dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$. $\square$

Remarque. Soit M un MU^*-module filtré nul en degré assez grand ; alors M est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ si et seulement si la filtration de M est la filtration par les coefficients et si le MU^*-module sous-jacent à M est le MU^*-module obtenu par extension des scalaires $\mathrm{MU}^* \otimes_{\mathbb{Z}} N$ pour un certain groupe abélien gradué N complet pour la filtration p-adique et sans torsion. Inversement le MU^*-module sous-jacent à un objet M de $\widehat{\mathcal{L}}$ s'écrit $\mathrm{MU}^* \otimes_{\mathbb{Z}} N$ pour un certain groupe abélien gradué N si et seulement si M est nul en degré assez grand.

Observons que la sous-catégorie $\widehat{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ est stable par produits quelconques en particulier par sommes finies. Les colimites filtrantes dans $\widehat{\mathcal{L}}$ sont les complétés pour la filtration des colimites filtrantes dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$.

Proposition 1.2.1.3. *Soient $M \to N$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{L}}$, K le noyau et Q le conoyau du morphisme de* MU^**-modules sous-jacent, munis de la filtration induite par celle de M et N respectivement.*

(a) *Si l'application $M/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^1$ est surjective alors K est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et la suite $0 \to K \to M \to N \to 0$ est une suite exacte dans $\mathcal{M}$ scindée dans $\widehat{\mathcal{L}}$.*

(b) *Si l'application $M/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^1$ est injective alors Q est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et la suite $0 \to M \to N \to Q \to 0$ est une suite exacte dans $\mathcal{M}$ scindée dans $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. Soit $d : M \to N$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{L}}$ induisant une surjection $M/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^1$ et notons K_n le noyau du morphisme $M/\mathrm{f}^n \to N/\mathrm{f}^n$; K_n est un $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n$-module. On montre par récurrence sur n en utilisant la condition (3) du lemme 1.2.1.2 que l'application $M/\mathrm{f}^n \to N/\mathrm{f}^n$ est surjective. Le fait que N/f^n est un $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n$-module libre implique alors que l'application $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n \otimes_{\mathrm{MU}^*} K_{n+1} \to K_n$ est un isomorphisme ; en particulier l'application $K_{n+1} \to K_n$ est surjective. Posons $K = \lim_n K_n$

qu'on filtre par $\mathrm{f}^n K = \mathrm{Ker}(K \to K_n)$; alors K est dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ et vérifie les conditions (1), (2) et (3) du lemme 1.2.1.2 donc est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. De plus les suites exactes $0 \to K_n \to M/\mathrm{f}^n \to N/\mathrm{f}^n \to 0$ induisent en passant à la limite sur n une suite exacte $0 \to K \to M \to N \to 0$. Il reste à démontrer que cette suite exacte est scindée dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Soit L un MU^*-module libre et $L \to N$ un morphisme dans $\mathcal{M}$ induisant un isomorphisme $\widehat{L} \to N$ dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Comme l'application $M \to N$ est surjective, le morphisme $L \to N$ se relève en un morphisme $L \to M$, d'où par adjonction un relèvement de l'isomorphisme $\widehat{L} \to N$ en un morphisme $\widehat{L} \to M$, c'est à dire une section du morphisme $M \to N$ dans $\widehat{\mathcal{L}}$; notons la s. On vérifie que le morphisme $\mathrm{Id} - sd : M \to M$ induit un retract s' de $K \to M$ dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et que le morphisme $(s', d) : M \to K \times N$ est un isomorphisme. Le fait que la filtration de K soit induite par celle de M en résulte, d'où le point (a).

Le point (b) est similaire : Soit Q le conoyau d'un morphisme $M \to N$ de $\widehat{\mathcal{L}}$, muni de la filtration induite par celle de N ; on vérifie de la même façon que si $M/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^1$ est injective alors la suite $0 \to M/\mathrm{f}^n \to N/\mathrm{f}^n \to Q/\mathrm{f}^n \to 0$ est exacte pour tout n et Q est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. □

COROLLAIRE 1.2.1.4. *Soit $M \to N$ un morphisme de $\widehat{\mathcal{L}}$; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme de* MU^**-modules sous-jacent est un isomorphisme.*

(ii) *Le morphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués $M/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^1$ est un isomorphisme.*

(iii) *Le morphisme $M \to N$ est un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. La condition (iii) implique clairement les conditions (i) et (ii). Si l'une des conditions (i) et (ii) est satisfaite alors l'application $M/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^1$ est surjective et on obtient par la proposition 1.2.1.3 une suite $0 \to K \to M \to N \to 0$ exacte dans $\mathcal{M}$ et scindée dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Si la condition (i) est satisfaite, K est nul et la section de $M \to N$ est un inverse. Si la condition (ii) est satisfaite, le quotient K/f^1 est nul d'où on déduit en utilisant le lemme 1.2.1.2 que K est nul ; on est ramené à la condition (i).
□

Espaces profinis sans p-torsion

Un espace profini X est dit de dimension finie s'il est égal à son squelette n-ième $\mathrm{Sk}_n X$ pour un certain entier n. On munit la MU-cohomologie continue des espaces profinis de dimension finie de la filtration par les coefficients. Elle n'est pas nécessairement complète.

Soit X un espace profini quelconque. La filtration par les coefficients de la MU-cohomologie continue des squelettes de X induit une filtration de la MU-cohomologie continue de X définie par $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*X = \cap_s \mathrm{Ker}(\mathrm{MU}^*X \to (\mathrm{MU}^*\mathrm{Sk}_s X)/\mathrm{f}^n)$ qu'on appelle filtration limite de MU^*X et pour laquelle MU^*X est un objet de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$. Nous verrons que cette filtration est complète lorsque X est le complété profini d'un espace mais ce n'est pas le cas en général. Toute équivalence faible $X \to X'$ dans $\widehat{\mathcal{S}}$ induit un morphisme $\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{MU}^*X'$ qui est un isomorphisme dans $\mathcal{M}$ mais pas dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ *a priori.*

Nous avons tout fait pour que le morphisme $\mathrm{MU}^*X \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$, induit par le morphisme de spectres $\mathrm{MU} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}/p$, se factorise par la projection $\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{MU}^*X/\mathrm{f}^1$.

Proposition - Définition 1.2.1.5. *Soit X un espace profini ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout entier positif v la réduction modulo p : $\mathbb{Z}/p^v \to \mathbb{Z}/p$ induit une surjection $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^v)^*X \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$.*

(ii) *La cohomologie continue de X à coefficients dans le groupe profini des entiers p-adiques est sans torsion.*

Si elles sont vérifiées, on dit que X est sans p-torsion.

Démonstration. (i) implique (ii) : la suite exacte de coefficients $0 \to \mathbb{Z}/p^v \to \mathbb{Z}/p^{v+1} \to \mathbb{Z}/p \to 0$ induit une suite exacte courte en cohomologie continue. On en déduit par récurrence que les applications $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^v)^*X$ sont injectives puis, en utilisant la suite exacte de coefficients $0 \to \mathbb{Z}/p \to \mathbb{Z}/p^{v+1} \to \mathbb{Z}/p^v \to 0$, que la tour $((\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^v)^*X)_v$ est une tour de surjections. On en déduit que la cohomologie continue de X à coefficients dans les entiers p-adiques se surjecte sur la limite de cette tour donc se surjecte sur la cohomologie modulo p continue de X. On conclut en observant la suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte de coefficients $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p \to 0$.

Inversement cette suite exacte longue montre sous l'hypothèse (ii) que l'application $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^*X \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$ est surjective, donc aussi les applications $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^v)^*X \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$ puisque la première se factorise par chacune des dernières. □

Exemples.

– Soient X un espace profini et s un entier positif ; alors le quotient $\mathrm{Sk}_{s+1}X/\mathrm{Sk}_s X$ est la limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ d'un pro-objet de la catégorie des bouquets finis de sphères de dimension $s+1$; en particulier il est sans p-torsion par le critère (i) de la définition.

– Le complété profini d'un espace X est sans p-torsion si et seulement si la cohomologie de X à coefficients dans les entiers p-adiques est sans torsion. Les résultats de Wilson ([Wi]) impliquent en particulier la proposition fondamentale :

Proposition 1.2.1.6. *Pour tout entier n l'espace profini $\widehat{\mathrm{MU}}_n(-)$ est sans p-torsion.*

Démonstration. On utilise la description par Wilson de l'homologie entière des espaces MU_n. Le cas $n \geq 1$ vient de ce que $\widehat{\mathrm{MU}}_n(-)$ est le pro-p-complété d'un espace dont l'homologie entière est libre en chaque degré. Le cas $n \leq 0$ se montre par récurrence en utilisant le fait que l'espace MU_n est le produit d'un espace simplement connexe et d'un produit de cercles S^1 donc l'espace profini $\widehat{\mathrm{MU}}_n(-)$ que nous avons défini s'identifie au produit d'un pro-p-groupe et du pro-p-complété de la composante connexe du neutre de MU_n, laquelle est encore d'homologie entière libre en chaque degré. □

Lemme 1.2.1.7. *Un espace profini est sans p-torsion si et seulement si chacun de ses squelettes est sans p-torsion.*

Démonstration. Soit X un espace profini et notons X_s son s-ième squelette, $s \in \mathbb{N}$. La suite exacte longue en cohomologie associée à la suite $X_s \to X \to X/X_s$ montre que le groupe $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^k X_s$ est égal à $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^k X$ pour $k < s$ et est une extension d'un sous-groupe de $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^{s+1} X/X_s$ par $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^s X$ pour $k = s$. Le groupe gradué $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^* X$ est donc sans torsion si chacun des $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^* X_s$ l'est. Inversement si $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^* X$ est sans torsion il suffit de montrer que le groupe $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^{s+1} X/X_s$ est sans torsion pour conclure que $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^* X_s$ est sans torsion. Or cela vient de ce que le groupe $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^{s+1} X/X_s$ s'injecte dans $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^{s+1} X_{s+1}/X_s$ et de ce que le quotient X_{s+1}/X_s est la limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ d'un pro - bouquet fini de sphères donc est sans p-torsion. □

Proposition 1.2.1.8. *Soit X un espace profini de dimension finie ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'espace profini X est sans p-torsion.*

(ii) *La* MU*-cohomologie continue de* X *munie de la filtration par les coefficients est dans* $\widehat{\mathcal{L}}$.

Si elles sont vérifiées, l'application canonique $\mathrm{MU}^*X/\mathrm{f}^1 \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. La proposition se démontre en introduisant une suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch reliant la MU-cohomologie continue d'un espace profini avec sa cohomologie continue à coefficients dans le groupe abélien profini $\widehat{\mathrm{MU}}^*$.

Soit M le Ω-spectre d'une théorie cohomologique sur $\mathcal{S}$. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, M_n est $(n-1)$-connexe et de cohomologie modulo p finie en chaque degré. On note alors $\widehat{M}_n(-)$ le n-ième terme du Ω-spectre représentant la M-cohomologie continue sur $\widehat{\mathcal{S}}$. Les hypothèses sur M_n garantissent que le pro-objet $\widehat{M}_n(-)$ à valeurs dans les ensembles finis simpliciaux pointés et fibrants dans $\widehat{\mathcal{S}}$ est isomorphe dans pro-h$\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}$ à une tour d'ensembles finis simpliciaux pointés et fibrants dans $\widehat{\mathcal{S}}$.

On note, pour tout entier t, $\widehat{M}^t$ le pro-p-groupe $\pi_0\widehat{M}_t(-) \simeq \pi_s\widehat{M}_{s+t}(-)$. Pour tout $\widehat{M}^*$-module N et tout entier s on note $\Sigma^s N$ le $\widehat{M}^*$-module égal à N^t en degré $s+t$, $t \in \mathbb{Z}$. Soit X un espace profini ; la filtration de X par ses squelettes induit une filtration décroissante de la M-cohomologie continue de X, définie par $\mathrm{F}^s_X M^*X = \mathrm{Ker}(M^*X \to M^*\mathrm{Sk}_{s-1}X)$.

Proposition 1.2.1.9. *Soit* X *un espace profini de dimension finie. Il existe une suite spectrale naturelle en* X *et* M *de terme* $\mathrm{E}_2^{s,t} = \mathrm{H}^s(X, \widehat{M}^t)$ *convergeant fortement vers le gradué* $\mathrm{E}_\infty^{s,t}$ *de la filtration de* M^*X *induite par la filtration squelettale de* X.

Démonstration. Notons X_s le s-ième squelette de X et X^+, respectivement X_s^+, la réunion disjointe de X, respectivement X_s, et d'un point base. La suite $X_{s-1}^+ \to X_s^+ \to X_s^+/X_{s-1}^+$ induit en cohomologie un triangle exact

$$\begin{tikzcd}
M^*X_s \arrow[rr] & & M^*X_{s-1} \arrow[dl, "\partial"] \\
& \widetilde{M}^*X_s^+/X_{s-1}^+ \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

de sorte qu'on obtient une suite spectrale de terme $\mathrm{E}_1^{s,t} = \widetilde{M}^{s+t}X_s^+/X_{s-1}^+$ et dont la différentielle d_r est de bidegré $(r, 1-r)$. Si X est de dimension n alors la suite spectrale dégénère au terme E_{n+1} et $\Sigma^s\mathrm{E}_{n+1}^{s,*}$ s'identifie au quotient $(\mathrm{F}^s_X M^*X)/(\mathrm{F}^{s+1}_X M^*X)$. Il nous reste à identifier le terme E_2.

L'espace profini X_s^+/X_{s-1}^+ est un pro-objet de la catégorie des bouquets finis de sphères de dimension s. La différentielle $\mathrm{d}_1 : \widetilde{M}^{s+t}X_s^+/X_{s-1}^+ \to \widetilde{M}^{s+t+1}X_{s+1}^+/X_s^+$ est induite par la composée $X_{s+1}^+/X_s^+ \to \Sigma X_s^+ \to \Sigma(X_s^+/X_{s-1}^+)$. Quite à suspendre on peut supposer $s \geq 2$. On note pro-Ab la catégorie des pro-groupes abéliens. On dispose de morphismes canoniques

$$\widetilde{M}^{s+t}X_s^+/X_{s-1}^+ \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(X_s^+/X_{s-1}^+, \widehat{M}_{s+t}(-)) \\ \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-Ab}}(\pi_s(X_s^+/X_{s-1}^+), \widehat{M}^t)$$

et

$$\widetilde{\mathrm{H}}^s(X_s^+/X_{s-1}^+, \widehat{M}^t) \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(X_s^+/X_{s-1}^+, \mathrm{K}(\widehat{M}^t, s)) \\ \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-Ab}}(\pi_s(X_s^+/X_{s-1}^+), \widehat{M}^t).$$

LEMME 1.2.1.10. *Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $S(-)$ un pro - bouquet fini de sphères de dimension n ; alors la composée*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(S(-), \widehat{M}_t(-)) \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(S(-), \widehat{M}_t(-)) \\ \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-Ab}}(\pi_n S(-), \pi_n \widehat{M}_t(-))$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

Démonstration. L'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(S(i), \widehat{M}_t(j)) \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-Ab}}(\pi_n S(i), \pi_n \widehat{M}_t(j))$ est un isomorphisme de groupes abéliens pour tout couple d'indices (i, j). On en déduit que l'application $\mathrm{Hom}_{\text{pro-h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(S(-), \widehat{M}_t(-)) \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-Ab}}(\pi_n S(-), \pi_n \widehat{M}_t(-))$ est un isomorphisme. Le pro-groupe abélien $\pi_{n+1}\widehat{M}_t(-)$ est pro-isomorphe à une tour de groupes finis donc pro-isomorphe à une tour de surjections. Comme chaque $\pi_n S(i)$ est un groupe abélien libre, le pro-groupe abélien $(\mathrm{Hom}_{\text{pro-Ab}}(\pi_{n+1}\Sigma S(-), \pi_{n+1}\widehat{M}_t(j)))_j$ est encore pro-isomophe à une tour de surjections donc est sans $\lim^1$. On en déduit que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(S(-), \widehat{M}_t(-)) \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(S(-), \widehat{M}_t(-))$ est également un isomorphisme (cf la discussion sur les limites et colimites homotopiques). □

On conclut de ce qui précède que les groupes abéliens $\widetilde{M}^{s+t}X_s^+/X_{s-1}^+$ et $\widetilde{\mathrm{H}}^s(X_s^+/X_{s-1}^+, \widehat{M}^t)$ sont naturellement isomorphes (comme foncteurs en un pro - bouquet fini de sphères de dimension s) puis que le terme $\mathrm{E}_2^{s,t}$ de la suite spectrale est naturellement isomorphe au s-ième groupe de cohomologie continue de X à coefficients dans $\widehat{M}^t$. □

Remarque. Lorsque l'espace profini X n'est pas de dimension finie, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch est toujours définie mais ne converge pas nécessairement vers le gradué de la filtration de M^*X induite par la filtration squelettale de X. Adams ([AD1, part. II, §7,8]) décrit les conditions de convergence par l'équivalence des deux conditions suivantes (le cadre profini n'introduit pas de différence) :

(1) Les applications $\mathrm{E}_\infty^{s,t} \to \lim_r \mathrm{E}_r^{s,t}$ et $M^*X \to \lim_s M^*X/\mathrm{F}_X^s$ sont des isomorphismes.

(2) Les groupes $\lim_r^1 \mathrm{E}_r^{s,t}$ sont nuls.

(Où $\mathrm{E}_\infty^{s,t}$ désigne le quotient $\mathrm{F}_X^s M^*X/\mathrm{F}_X^{s+1}M^*X$.) La suite spectrale converge en particulier lorsqu'elle dégénère. Voir [BK, chap. IX,sect. 5] pour une démonstration.

Revenons à la démonstration de la proposition 1.2.1.8. Soit X un espace profini de dimension finie et sans p-torsion. Notons $\mathrm{E}_r^{s,t}(M,X)$ le terme E_r de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch associée à X et une théorie cohomologique M. L'unité du spectre en anneau $\mathrm{H}\mathbb{Z}$ induit un morphisme de spectres $\mathrm{MU} \to \mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}$. L'homomorphisme entre anneaux de coefficients $\widehat{\mathrm{MU}}^* \to \mathrm{H}\widehat{\mathbb{Z} \wedge \mathrm{M}}\mathrm{U}^*$ est injectif. On en déduit que pour X sans p-torsion, l'application entre groupes bigradués $\mathrm{E}_2^{*,*}(\mathrm{MU}, X) \to \mathrm{E}_2^{*,*}(\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}, X)$ est encore injective. Or la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch associée au spectre $\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}$ dégénère au terme E_2 ($\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}$ est somme de suspensions du spectre $\mathrm{H}\mathbb{Z}$). Il en est donc de même de la suite spectrale associée à MU.

On vérifie facilement à l'aide du lemme 1.2.1.2 et de la suite exacte longue en cohomologie associée à une suite exacte courte de coefficients que le MU^*-module $\mathrm{H}^s(X, \widehat{\mathrm{MU}}^*)$ muni de la filtration par les coefficients est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ pour tout s. On en déduit par récurrence et avec la proposition 1.2.1.3 que le quotient $\mathrm{MU}^*X/\mathrm{F}_X^s$, muni de la filtration par les coefficients, est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ donc que MU^*X est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et est isomorphe au MU^*-module $\oplus_s \Sigma^s \mathrm{H}^s(X, \widehat{\mathrm{MU}}^*)$. L'application $\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{H}\mathbb{Z}/p^*X$ se factorise par l'isomorphisme $\mathrm{MU}^*X \to \oplus_s \Sigma^s \mathrm{H}^s(X, \widehat{\mathrm{MU}}^*)$ donc induit un isomorphisme $\mathrm{MU}^*X/\mathrm{f}^1 \to \mathrm{H}\mathbb{Z}/p^*X$.

L'implication de (i) par (ii) est donnée par [CS] : X étant de dimension finie, supposons que $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^*X$ n'est pas sans torsion et soit x un élément non nul et de torsion de $\mathrm{H}\mathbb{Z}_p{}^*X$ de degré s_0 maximal. Pour tout entier $s > s_0$ le terme $\mathrm{E}_2^{s,*}(\mathrm{MU}, X)$ s'injecte dans $\mathrm{E}_2^{s,*}(\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}, X)$. Comme la suite spectrale associée au spectre $\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}$ dégénère au terme E_2, le morphisme $\mathrm{E}_r^{s,*}(\mathrm{MU}, X) \to \mathrm{E}_r^{s,*}(\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}, X)$ reste injectif pour $s > s_0$. L'élément x donne un élément de torsion dans le terme $\mathrm{E}_2^{s_0,0}(\mathrm{MU}, X)$ qui ne peut être dans l'image d'une différentielle pour une question de degré et qui est dans le noyau de toutes les différentielles par comparaison avec la suite spectrale associée à $\mathrm{H}\mathbb{Z} \wedge \mathrm{MU}$. Il se relève par récurrence en un élément de torsion de $\mathrm{MU}^*X/\mathrm{F}_X^s$, $s \geq s_0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 1.2.1.11. *Soit X un espace profini sans p-torsion ; alors la* MU*-cohomologie continue de X munie de la filtration limite est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et l'application canonique $\mathrm{MU}^*X/\mathrm{f}^1 \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le corollaire est conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 1.2.1.12. *Soit (M_s) une tour d'objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ telle que la tour de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels (M_s/f^1) est sans $\lim^1$; alors la tour de MU^*-modules (M_s) est sans $\lim^1$, le MU^*-module $M_\infty = \lim_s M_s$ muni de la filtration limite $\mathrm{f}^n M_\infty = \cap_s \mathrm{Ker}(M_\infty \to M_s/\mathrm{f}^n)$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et l'application $M_\infty/\mathrm{f}^n \to \lim_s M_s/\mathrm{f}^n$ est un isomorphisme pour tout entier n.*

Démonstration. Notons pour tout entier n $M_{\infty,n}$ la limite en s de la tour (M_s/f^n). La condition (3) du lemme 1.2.1.2 appliquée aux objets M_s et l'absence de $\lim^1$ montrent que la tour $(M_{\infty,n})$ est une tour de surjections. Par commutation des limites entre elles, M_∞ s'identifie à la limite des $M_{\infty,n}$ et $\mathrm{f}^n M_\infty$ au noyau du morphisme $M_\infty \to M_{\infty,n}$ lequel est surjectif par ce qui précède. Le fait que chaque M_s vérifie les conditions (2) et (3) du lemme 1.2.1.2 impliquent alors que M_∞ vérifie les mêmes conditions donc est dans $\widehat{\mathcal{L}}$.

Il reste à vérifier que la tour de MU^*-modules (M_s) est sans $\lim^1$; or cela vient de la suite exacte $0 \to \lim^1_n M_{\infty,n} \to \lim^1_s M_s \to \lim_n \lim^1_s (M_s/\mathrm{f}^n) \to 0$ et du fait que l'annulation du terme $\lim^1_s M_s/\mathrm{f}^1$ et la suite exacte $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes M_s/\mathrm{f}^1 \to M_s/\mathrm{f}^{n+1} \to M_s/\mathrm{f}^n \to 0$ impliquent par récurrence l'annulation du terme $\lim^1_s M_s/\mathrm{f}^n$. □

Lemme 1.2.1.13. *Soit X un espace profini sans p-torsion ; alors la* MU*-cohomologie continue de X munie de la filtration limite est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et l'application $\mathrm{MU}^*X/\mathrm{f}^n \to \lim_s(\mathrm{MU}^*\mathrm{Sk}_s X/\mathrm{f}^n)$ est un isomorphisme pour tout entier n.*

Démonstration. Le lemme est conséquence du précédent une fois observé que, pour tout entier $s \geq 0$, le MU^*-module filtré $\mathrm{MU}^*\mathrm{Sk}_s X$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et que la la tour des $(\mathrm{MU}^*\mathrm{Sk}_s X)/\mathrm{f}^1$ est stationnaire degré par degré. □

□

Remarques.

- Soit X un espace profini sans p-torsion ; on peut monter que la filtration limite de MU^*X coïncide avec la fermeture squelettale de la filtration par les coefficients de MU^*X définie par

$$\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*X = \cap_s(\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^* \cdot \mathrm{MU}^*X + \mathrm{F}^s_X\mathrm{MU}^*X) \ .$$

- Nous démontrerons plus loin que lorsque X est le complété profini d'un espace la condition (ii) de la proposition 1.2.1.8 implique la condition (i). Nous ne savons pas si c'est le cas en général. On peut également formuler un résultat en terme de tour des MU-cohomologies des squelettes de X :

PROPOSITION 1.2.1.14. *Soit X un espace profini ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'espace profini X est sans p-torsion.*

(ii) *La tour des* MU*-cohomologies continues des squelettes de X est pro-isomorphe à une tour d'objets de $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Observons pour terminer que le corollaire 1.2.1.4 implique que le foncteur $\widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{f}}$, $X \mapsto \mathrm{MU}^*X$ se factorise par $\widehat{\mathcal{S}} \to \mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$.

Produit d'espaces sans p-torsion

Soient M et N deux objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ tels que M/f^1 et N/f^1 sont nuls en degré assez petit. Le MU^*-module filtré complet $M\widehat{\otimes}N$ défini par $\forall n, (M\widehat{\otimes}N)/\mathrm{f}^n = M/\mathrm{f}^n\otimes_{\mathrm{MU}^*}N/\mathrm{f}^n$ est un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ qu'on appelle produit tensoriel de M et N dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Si M et N sont deux MU^*-modules libres avec $M/(\mathrm{f}^1\mathrm{MU}^*\cdot M)$ et $N/(\mathrm{f}^1\mathrm{MU}^*\cdot N)$ nuls en degré assez petit alors $\widehat{M}\widehat{\otimes}\widehat{N}$ s'identifie à $M \mathbin{\widehat{\otimes_{\mathrm{MU}^*}}} N$.

PROPOSITION 1.2.1.15. *Soient X et Y deux espaces profinis sans p-torsion ; alors leur produit $X \times Y$ est sans p-torsion et le morphisme* $\mathrm{MU}^*X\otimes_{\mathrm{MU}^*}\mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*(X\times Y)$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{MU}^*X\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*(X \times Y)$ *dans $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. On dispose sans hypothèse sur X et Y d'un isomorphisme canonique $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X \otimes (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*Y \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*(X \times Y)$. On en déduit, par récurrence sur n en utilisant la suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte de coefficients $0 \to \mathbb{Z}/p \to \mathbb{Z}/p^{n+1} \to \mathbb{Z}/p^n \to 0$ et le fait que X et Y sont sans p-torsion, que l'application $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^n)^*X \otimes (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^n)^*Y \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^n)^*(X \times Y)$ est un isomorphisme, puis que l'application $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p^n)^*(X \times Y) \to (\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*(X \times Y)$ est surjective pour tout n.

La seconde partie de la proposition s'obtient lorsque X et Y sont de dimension finie en comparant la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch du produit $X \times Y$ et le produit tensoriel des suites spectrales de X et de Y. On montre à nouveau par récurrence sur n que l'application $\mathrm{H}^*(X, \mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n) \otimes_{\mathrm{MU}^*} \mathrm{H}^*(Y, \mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n) \to \mathrm{H}^*(X \times Y, \mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n)$ est un isomorphisme d'où on déduit que les termes E_2 des suites spectrales sont isomorphes. Le cas général s'obtient en passant à la limite sur les squelettes.

□

Remarque. Le produit d'une famille d'espaces profinis sans p-torsion est sans p-torsion : on le montre en utilisant le fait que la cohomologie modulo p^n continue du produit est la colimite filtrante des cohomologies continues des produits des sous-familles finies. On en déduit également que la MU-cohomologie continue du produit est la colimite filtrante dans $\widehat{\mathcal{L}}$ des MU-cohomologies continues des produits des sous-familles finies.

1.2.2. Préparation au cas général : diagrammes coégalisateur et algèbres sur une monade

Commençons par motiver l'introduction des algèbres sur une monade.

On note $\mathcal{E}$ns-gr la catégorie des ensembles $\mathbb{Z}$-gradués et, pour tout entier n, $\{n\}$ l'ensemble gradué formé du seul singleton en degré n. Soit X un espace profini ; on dispose par définition d'une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \widehat{\mathrm{MU}}_n(-)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{ns-gr}}(\{n\}, \mathrm{MU}^*X)$. Pour tout ensemble gradué S définissons $\mathrm{K}(S)$ comme le produit dans $\widehat{\mathcal{S}}$ des espaces profinis $\widehat{\mathrm{MU}}_{|s|}(-)$, s décrivant S et $|s|$ désignant le degré de s. L'espace profini $\mathrm{K}(S)$ est sans p-torsion et on dispose d'un morphisme $S \to \mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S)$ tel que l'application induite $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{K}(S)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{ns-gr}}(S, \mathrm{MU}^*X)$ est une bijection pour tout espace profini X.

L'adjonction munit le foncteur $\mathrm{G} : S \mapsto \mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S)$ d'une structure de monade sur $\mathcal{E}$ns-gr, *i.e.*de transformations naturelles $\mathrm{Id} \to \mathrm{G}$ (l'unité de l'adjonction) et $\mathrm{G} \circ \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ (qui associe à un ensemble gradué S l'image en MU-cohomologie continue de l'application adjointe de l'identité de $\mathrm{G}(S)$) vérifiant les axiomes d'un monoïde (voir ci-dessous). Observons que G et la transformation naturelle $\mathrm{G} \circ \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ sont à valeurs dans $\widehat{\mathcal{L}}$.

L'application $X \to \mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X)$, adjointe de l'identité de MU^*X, induit en MU-cohomologie continue un morphisme $\mathrm{G}(\mathrm{MU}^*X) \to \mathrm{MU}^*X$ faisant de MU^*X une G-algèbre (une G-algèbre est un ensemble gradué S muni d'un morphisme $\mathrm{G}(S) \to S$ vérifiant les axiomes d'une action).

La structure de monade sur G permet d'associer à la MU-cohomologie continue de X un objet simplicial $\mathrm{G}_\bullet(\mathrm{MU}^*X)$, image en MU-cohomologie continue d'un diagramme d'espaces sans p-torsion, et un morphisme de $\mathrm{G}_\bullet(\mathrm{MU}^*X)$ dans l'objet simplicial constant MU^*X qui est une équivalence d'homotopie entre objets simpliciaux de $\mathcal{E}$ns-gr. En particulier la MU-cohomologie continue de X apparaît canoniquement comme le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr d'une double-flèche avec section commune de $\widehat{\mathcal{L}}$.

Nous étudierons dans la prochaine section et la section 1.4 la structure additive qui résulte de cette présentation, avec pour objectif le lien entre la MU-cohomologie continue de X et sa cohomologie modulo p continue. La structure de G-algèbre de MU^*X est ce que nous appellerons la structure d'algèbre instable de MU^*X et sera étudiée en section 1.3. La présente section précise quant à elle quelques propriétés des algèbres sur une monade dont nous aurons besoin par la suite. Le lecteur pourra se reporter à [MAC].

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Nous appelons double-flèche de $\mathcal{C}$ un couple d'objets C_0, C_1 de $\mathcal{C}$ et un couple de morphismes $\mathrm{d}_0, \mathrm{d}_1 : C_1 \to C_0$ dans $\mathcal{C}$; une telle donnée sera notée $C_1 \rightrightarrows C_0$. Nous appelons 1-complexe une double-flèche munie d'une section commune s_0 de d_0 et d_1 ; on le désignera par $C_0 \leftrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow C_1$.
Dualement nous appelons 1-cocomplexe une double-flèche $C^0 \rightrightarrows C^1$ munie d'un retract commun des deux morphismes $C^0 \to C^1$ (*i.e.*un 1-complexe de la catégorie opposée à $\mathcal{C}$).

Nous dirons qu'un diagramme $C_1 \rightrightarrows C_0 \to C$ est coégalisateur si le morphisme $C_0 \to C$ fait de C le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ de la double-flèche $C_1 \rightrightarrows C_0$. Nous dirons également que le diagramme $C_1 \leftrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow C_0 \to C$ est coégalisateur ou que C est le coégalisateur du 1-complexe $C_1 \leftrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow C_0$ si le diagramme sous-jacent $C_1 \rightrightarrows C_0 \to C$ est coégalisateur. *Idem* pour les diagrammes égalisateurs.

Soient f et g deux morphismes entre 1-complexes $C_1 \leftrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow C_0$ et $D_1 \leftrightarrows\!\!\!\!\!\rightarrow D_0$. Une homotopie en degré 0 de f vers g est un morphisme $h : C_0 \to D_1$ tel que $\mathrm{d}_0 h = f$ et $\mathrm{d}_1 h = g$. Si un tel morphisme existe, nous dirons que f est homotope en degré 0 à g.

Nous dirons qu'un morphisme $f : \triangle \to \triangle'$ entre 1-complexes est une équivalence d'homotopie en degré 0 s'il existe un morphisme $g : \triangle' \to \triangle$ et des homotopies en degré 0 de l'identité de $\triangle$ vers gf et de l'identité de $\triangle'$ vers fg.

LEMME 1.2.2.1.

(a) *Soient $f, g : \triangle \to \triangle'$ deux morphismes entre 1-complexes admettant des coégalisateurs ; si f est homotope en degré 0 à g alors f et g induisent les mêmes morphismes entre les coégalisateurs.*

(b) *Soient C un objet et f un morphisme d'un 1-complexe $C_1 \leftrightarrows C_0$ dans le diagramme constant $C \leftrightarrows C$; si f est une équivalence d'homotopie en degré 0 alors le diagramme $C_1 \leftrightarrows C_0 \to C$ est coégalisateur.*

On a bien sûr le même formalisme et les mêmes énoncés pour les 1-cocomplexes de $\mathcal{C}$.

Le point (b) du lemme conduit à la terminologie suivante : Soit $C_1 \leftrightarrows C_0$ un 1-complexe de $\mathcal{C}$ et $g : C_0 \to C$ un morphisme égalisant d_0 et d_1. Le morphisme obtenu de $C_1 \leftrightarrows C_0$ dans le diagramme constant $C \leftrightarrows C$ est une équivalence d'homotopie en degré 0 si et seulement s'il existe des morphismes $s : C \to C_0$ et $s' : C_0 \to C_1$ tels qu'on ait les identités $gs = \mathrm{Id}$, $\mathrm{d}_0 s' = \mathrm{Id}, \mathrm{d}_1 s' = sg$. Lorsque ces morphismes existent, on dit que le diagramme $C_1 \leftrightarrows C_0 \to C$ est un diagramme coégalisateur scindé ou que C est un coégalisateur scindé du 1-complexe $C_1 \leftrightarrows C_0$. *Idem* pour les diagrammes égalisateurs scindés. La propriété d'être scindé est préservée par tout foncteur.

Supposons maintenant la catégorie $\mathcal{C}$ additive. La donnée d'un 1-complexe de $\mathcal{C}$ est alors équivalente à la donnée d'un morphisme de $\mathcal{C}$: Soit $M_1 \leftrightarrows M_0$ un 1-complexe de $\mathcal{C}$. La composée $\mathrm{s}_0\mathrm{d}_0$ est un projecteur de M_1 ; notons M_1' son noyau et d la restriction de d_1 à M_1'. On dispose d'un isomorphisme canonique du 1-complexe $M_1 \leftrightarrows M_0$ dans le 1-complexe $M_0 \oplus M_1' \leftrightarrows M_0$ défini par $\mathrm{d}_0 = (\mathrm{Id}, 0)$, $\mathrm{d}_1 = (\mathrm{Id}, \mathrm{d})$, $\mathrm{s}_0 = (\mathrm{Id}, 0)$. En particulier le foncteur de la catégorie des 1-complexes de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des morphismes de $\mathcal{C}$ qui associe à un 1-complexe $M_1 \leftrightarrows M_0$ le morphisme $\mathrm{d} : M_1' \to M_0$ est une équivalence de catégories.

Le coégalisateur de $M_1 \leftrightarrows M_0$ s'identifie via cette équivalence au conoyau de d. Pour toute paire de morphismes f, g entre 1-complexes, une homotopie en degré 0 de f vers g s'identifie via cette équivalence à un relèvement de $g - f$ par rapport à d. En particulier la relation d'homotopie en degré 0 entre morphismes de 1-complexes est une relation d'équivalence.

Lemme 1.2.2.2. *Soient $M_1 \leftrightarrows M_0$ un 1-complexe de groupes abéliens gradués et M son coégalisateur, alors le diagramme $M_1 \leftrightarrows M_0 \to M$ est un diagramme coégalisateur scindé dans* $\mathcal{E}$ns-gr. *De même pour l'égalisateur d'un 1-cocomplexe de groupes abéliens gradués.*

Démonstration. On peut oublier la graduation. Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de groupes abéliens, alors l'ensemble sous-jacent à B est en bijection avec le produit $A \times C$. Précisément il existe un retract de l'application $A \to B$ et une section de l'application $B \to C$ tels que l'identité de B soit la somme, pour la structure de groupe de B, des composées $B \to A \to B$ et $B \to C \to B$. Soit maintenant $M_1 \leftrightarrows M_0$ un 1-complexe de groupes abéliens et M son coégalisateur. Ecrivons $M_1 = M_0 \oplus M_1'$ où M_1' est le noyau du projecteur $\mathrm{s}_0\mathrm{d}_0$ et soit K le noyau de l'épimorphisme $M_0 \to M$. L'application d'ensembles sous-jacente à $M_1' \to K$ admet une section. On en déduit avec ce qui précède l'existence d'une application $M_0 \to M_1'$ et d'une section de $M_0 \to M$ telles que la somme des composées $M_0 \to M_1' \to M_0$ et $M_0 \to M \to M_0$ soit l'identité, ce qui montre que le diagramme coégalisateur $M_1 \leftrightarrows M_0 \to M$ est scindée dans $\mathcal{E}$ns-gr. L'énoncé dual se démontre de la même façon. $\square$

L'importance pour notre propos des diagrammes coégalisateurs scindés apparaîtra par la proposition 1.2.2.3 ci-dessous. Nous commençons par définir :

Une monade sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un endofoncteur T de $\mathcal{C}$ muni de transformations naturelles $\eta : \mathrm{Id} \to T$ et $\mu : T^2 \to T$ telles que pour tout objet C les composées $\mu(C) \circ T(\mu(C))$ et $\mu(C) \circ \mu(T(C))$, $T^3(C) \to T(C)$ sont égales et les composées $\mu(C) \circ T(\eta(C))$ et $\mu(C) \circ \eta(T(C))$, $T(C) \to T(C)$ sont l'identité.

Soit T une monade sur $\mathcal{C}$. Une T-algèbre est un objet M muni d'un morphisme $\alpha : T(M) \to M$ tel que les composées $\alpha \circ \mu(M)$ et $\alpha \circ T(\alpha)$: $T^2(M) \to M$ sont égales et la composée $\alpha \circ \eta(M) : M \to M$ est l'identité. Si M et M' sont deux T-algèbres, un morphisme de T-algèbres de M dans M' est un morphisme $M \to M'$ dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \to & T(M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & M' \end{array}$$

commute ; en particulier un morphisme de T-algèbres est un isomorphisme si et seulement si le morphisme de $\mathcal{C}$ sous-jacent est un isomorphisme.

On notera généralement $\mathcal{C}(T)$ la catégorie des T-algèbres de $\mathcal{C}$. On dispose d'un foncteur oubli évident $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$.

Soit C un objet de $\mathcal{C}$; la structure de monade sur T fait de $T(C)$ une T-algèbre et le morphisme $\eta(C) : C \to T(C)$ induit pour toute T-algèbre N une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, N)$: $T(C)$ est la T-algèbre libre sur C. Plus généralement on appelle T-algèbre libre une T-algèbre isomorphe à $T(C)$ pour un certain objet C.

Soit M une T-algèbre alors le diagramme $T^2(M) \leftrightarrows\!\!\rightarrow T(M) \to M$, formé des morphismes $\mu(M)$, $T(\alpha)$, $T(\eta)$ et η, est un diagramme coégalisateur canoniquement scindé dans $\mathcal{C}$. On vérifie d'autre part que le morphisme de structure $T(M) \to M$ est un morphisme de T-algèbres de sorte que le diagramme $T^2(M) \leftrightarrows\!\!\rightarrow T(M) \to M$ est un diagramme dans $\mathcal{C}(T)$, coégalisateur par le point (b) de la proposition ci-dessous mais pas coégalisateur scindé en général.

Proposition 1.2.2.3.

(a) *Soit T une monade sur $\mathcal{E}$*ns-gr *telle que le foncteur T et la transformation naturelle $T \circ T \to T$ sont à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens gradués, alors le coégalisateur dans $\mathcal{E}$*ns-gr *d'un 1-complexe de T-algèbres est un coégalisateur scindé.*

(b) *Soient T une monade sur une catégorie $\mathcal{C}$ et $M_1 \leftrightarrows\!\!\rightarrow M_0$ un 1-complexe de T-algèbres admettant un coégalisateur M dans $\mathcal{C}$. On suppose que les diagrammes images par T et T^2 du diagramme $M_1 \leftrightarrows\!\!\rightarrow M_0 \to M$ sont encore coégalisateur dans $\mathcal{C}$; alors M hérite d'une structure naturelle de T-algèbre faisant de lui le coégalisateur du 1-complexe dans $\mathcal{C}(T)$.*

Démonstration. (a) Soit M une T-algèbre, alors M est canoniquement le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr du 1-complexe de groupes abéliens gradués $T^2(M) \leftrightarrows\!\!\rightarrow T(M)$ donc hérite d'une structure de groupe abélien gradué. On en déduit grâce au lemme 1.2.2.2 que l'ensemble gradué coégalisateur d'un 1-complexe de T-algèbres est un coégalisateur scindé dans $\mathcal{E}$ns-gr.

Venons en à (b) : Si les diagrammes $T(M_1) \leftrightarrows\!\!\rightarrow T(M_0) \to T(M)$ et $T^2(M_1) \leftrightarrows\!\!\rightarrow T^2(M_0) \to T^2(M)$ sont des diagrammes coégalisateur dans $\mathcal{C}$, les morphismes de structure $T(M_1) \to M_1$ et $T(M_0) \to M_0$ induisent un morphisme $T(M) \to M$ qui fait de M une T-algèbre. Comme le morphisme $T(M_0) \to T(M)$ est épi, tout morphisme de T-algèbres de M_0 dans une T-algèbre N qui se factorise dans $\mathcal{C}$ par $M_0 \to M$ se factorise dans la catégorie des T-algèbres. $\square$

Remarquons qu'une monade sur $\mathcal{E}$ns-gr vérifiant les hypothèses du point (a) vérifie celles du (b).

Soit T une monade sur une catégorie $\mathcal{C}$ et supposons l'existence dans $\mathcal{C}$ des limites et colimites indexées par une catégorie petite. Si les coégalisateurs de 1-complexes existent dans la catégorie $\mathcal{C}(T)$ alors il en est de même des colimites de diagrammes indexés par une catégorie petite : Soit

(C_α) un diagramme dans $\mathcal{C}$; on vérifie par adjonction que l'image par T de la colimite des C_α est la colimite comme T-algèbre du diagramme $(T(C_\alpha))$. Soit maintenant (M_α) un diagramme de T-algèbres, alors la T-algèbre colimite des M_α est la T-algèbre coégalisatrice du 1-complexe $\mathrm{colim}_\alpha T^2(M_\alpha) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{colim}_\alpha T(M_\alpha)$. Notons que le foncteur oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ ne commute pas aux colimites en général.

Dualement un diagramme (M_α) de T-algèbres indexé par une catégorie petite admet toujours une limite. L'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent à la limite des M_α est la limite dans $\mathcal{C}$ du diagramme (M_α) et le morphisme $T(\lim_\alpha M_\alpha) \to \lim_\alpha M_\alpha$ est la limite des morphismes $T(\lim_\alpha M_\alpha) \to M_\alpha$ adjoints des projections $\lim_\alpha M_\alpha \to M_\alpha$.

Nous terminons par un argument de comparaison de catégories d'algèbres sur une monade.

Soit $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur admettant un adjoint à droite R. L'unité $\eta : \mathrm{Id} \to RL$ et la transformation naturelle $R\epsilon L : RLRL \to RL$ induite par la counité $\epsilon : LR \to \mathrm{Id}$ munissent la composée RL d'une structure de monade sur $\mathcal{C}$. (Inversement si T est une monade sur $\mathcal{C}$ alors le foncteur oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ est adjoint à droite du foncteur $C \mapsto T(C)$ et la monade T est issue de cette paire de foncteurs adjoints.)

Soit M une RL-algèbre alors le 1-complexe $(RL)^2(M) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow (RL)(M)$ est l'image par R du 1-complexe $LRL(M) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow L(M)$ de $\mathcal{D}$ formé des morphismes $\epsilon(L(M))$, $L(\alpha)$ et $L(\eta(M))$. Supposons que $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine d'une catégorie $\mathcal{D}'$, que les coégalisateurs de 1-complexes existent dans les catégories $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$ et que R s'étend en un foncteur $R' : \mathcal{D}' \to \mathcal{C}$ commutant aux coégalisateurs de 1-complexes. On dispose alors d'un foncteur $\underset{\sim}{R} : \mathcal{C}(RL) \to \mathcal{D}'$, qui associe à M le coégalisateur du 1-complexe $LRL(M) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow L(M)$, et d'un unique isomorphisme naturel $R'\underset{\sim}{R}(M) \to M$ dans $\mathcal{C}$ tel que le morphisme de structure $RL(M) \to M$ se factorise comme la composée de l'image par R' du morphisme $L(M) \to \underset{\sim}{R}M$ et du morphisme $R'\underset{\sim}{R}(M) \to M$.

Soit maintenant N un objet de $\mathcal{D}$ alors le morphisme $R(\epsilon(N)) : RLR(N) \to R(N)$ munit $R(N)$ d'une structure de RL-algèbre telle que le morphisme $\epsilon(N)$ se factorise par l'épimorphisme $LR(N) \to \underset{\sim}{R}R(N)$ dans $\mathcal{D}'$. On en déduit un foncteur $\widetilde{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(RL)$ relevant le foncteur $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et une transformation naturelle $\underset{\sim}{R}\widetilde{R} \to \iota$, où ι désigne l'inclusion de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$.

Lemme 1.2.2.4. *Soit N un objet de $\mathcal{D}$ alors le morphisme naturel $\underset{\sim}{R}\widetilde{R}(N) \to N$ induit pour toute RL-algèbre M une bijection* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(RL)}(M, \widetilde{R}(N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(\underset{\sim}{R}M, N)$.

Démonstration. Soient C et N des objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ respectivement. L'image par $\widetilde{R}$ de $L(C)$ est la RL-algèbre libre sur C et le diagramme $(LR)^2(L(C)) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow LR(L(C)) \to L(C)$ est (canoniquement) coégalisateur scindé de sorte que le morphisme canonique $\underset{\sim}{R}\widetilde{R}(L(C)) \to L(C)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}'$. L'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(RL)}(RL(C), \widetilde{R}(N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(\underset{\sim}{R}(RL(C)), N)$ est la composée des bijections $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(RL)}(RL(C), \widetilde{R}(N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(N))$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), N)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(\underset{\sim}{R}(RL(C)), N)$ induite respectivement par $\eta(C) : C \to RL(C)$, le foncteur L et la counité $\epsilon(N)$ et enfin l'isomorphisme $\underset{\sim}{R}\widetilde{R}(L(C)) \to L(C)$.

Soit maintenant M une RL-algèbre quelconque, alors M est le coégalisateur dans $\mathcal{C}(RL)$ du 1-complexe de RL-algèbres libres $(RL)^2(M) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow RL(M)$ et par construction $\underset{\sim}{R}M$ est le coégalisateur dans $\mathcal{D}'$ du 1-complexe image. $\square$

Proposition 1.2.2.5.

(a) *Le foncteur $\widetilde{R}$ induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ formée des objets isomorphes à l'image par L d'un objet de $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(RL)$ formée des RL-algèbres libres, d'inverse la restriction de $\underset{\sim}{R}$ à cette sous-catégorie.*

(b) *Pour toute RL-algèbre M et tout objet C de $\mathcal{C}$ l'objet $\underset{\sim}{R}M$ est isomorphe à $L(C)$ si et seulement si M est isomorphe à la RL-algèbre $RL(C)$ auquel cas le diagramme*

$$(RL)^2(M) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow RL(M) \to M$$

est scindé dans $\mathcal{C}(RL)$.

Démonstration. Nous savons déjà par la démonstration du lemme précédent que le morphisme canonique $\underset{\sim}{R}\widetilde{R}(L(C)) \to L(C)$ est un isomorphisme pour tout $C \in \mathcal{C}$. On en déduit pour M et N dans $\mathcal{C}(RL)$ et $\mathcal{D}$ respectivement que le morphisme $\underset{\sim}{R}\widetilde{R}(N) \to N$ est un isomorphisme si N est isomorphe à $L(C)$ pour un objet C et que $\underset{\sim}{R}M$ est isomorphe à $L(C)$ si M est isomorphe à la RL-algèbre libre sur C. Soit maintenant M une RL-algèbre telle que $\underset{\sim}{R}M$ est dans $\mathcal{D}$ alors $R'(\underset{\sim}{R}M)$ est l'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent à la RL-algèbre $\widetilde{R}(\underset{\sim}{R}M)$ et l'isomorphisme canonique $R'\underset{\sim}{R}M \to M$ dans $\mathcal{C}$ est un isomorphisme de RL-algèbres. En particulier si $\underset{\sim}{R}M$ est isomorphe à $L(C)$ alors M est isomorphe à la RL-algèbre $RL(C)$. Enfin le diagramme $(RL)^2(RL(C)) \leftrightarrows RL(RL(C)) \to RL(C)$ est un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{C}(RL)$ car image par $\widetilde{R}$ d'un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{D}$ et cette propriété est préservée par isomorphisme. $\square$

Proposition 1.2.2.6. *Soient L et T deux monades sur $\mathcal{C}$. On suppose que les coégalisateurs de 1-complexes existent dans $\mathcal{C}$, que L, respectivement T, transforme le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de L-algèbres, respectivement de T-algèbres, en le coégalisateur du 1-complexe image et que le foncteur oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ se factorise comme la composée d'un foncteur $\mathcal{O}'$: $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(L)$ et de l'oubli $\mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}$. Alors $\mathcal{O}'$ admet un adjoint à gauche T' tel que $T'(L(C)) = T(C)$ et le foncteur associé $\widetilde{\mathcal{O}}' : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(L)(\mathcal{O}'T')$ est un isomorphisme de catégories.*

Démonstration. Pour tout objet C de $\mathcal{C}$ on pose $T'(L(C)) = T(C)$. La bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(L)}(L(C), \mathcal{O}'N)$ pour tout objet N de $\mathcal{C}(T)$ fait de T' un foncteur en $L(C) \in \mathcal{C}(L)$. Soit maintenant M une L-algèbre. On définit $T'(M)$ comme le coégalisateur dans $\mathcal{C}(T)$ du 1-complexe $T'(L^2(M)) \leftrightarrows T'(L(M))$; alors T' est bien adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{O}'$.

Le foncteur $\widetilde{\mathcal{O}}' : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(L)(\mathcal{O}'T')$ induit le foncteur identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents ; on peut imposer la même propriété au foncteur $\underset{\sim}{\mathcal{O}}'$. Les morphismes canoniques $\widetilde{\mathcal{O}}'(\underset{\sim}{\mathcal{O}}'M) \to M$ pour $M \in \mathcal{C}(L)(\mathcal{O}'T')$ et $\underset{\sim}{\mathcal{O}}'\widetilde{\mathcal{O}}'(T(C)) \to T(C)$ pour $C \in \mathcal{C}$, qui sont des isomorphismes par la proposition précédente, sont alors l'identité de M et de $T(C)$ respectivement. Comme les foncteurs $\underset{\sim}{\mathcal{O}}'$ et $\widetilde{\mathcal{O}}'$ commutent aux coégalisateurs de 1-complexes, le morphisme $\underset{\sim}{\mathcal{O}}'\widetilde{\mathcal{O}}'(N) \to N$ est encore l'identité de N pour tout $N \in \mathcal{C}(T)$. $\square$

1.2.3. MU^*-modules filtrés à présentation dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et MU-cohomologie continue des espaces profinis dans le cas général

1-*complexes de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *et* $\widehat{\mathrm{L}}$-*algèbres*

A tout objet S de $\mathcal{E}$ns-gr on associe le MU^*-module libre $\mathrm{L}(S)$ de base S et son complété $\widehat{\mathrm{L}}(S)$ pour la filtration par les coefficients.

Le foncteur $\widehat{\mathrm{L}} : \mathcal{E}\text{ns-gr} \to \mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}} \to \mathcal{E}\text{ns-gr}$. On en déduit une structure de monade sur l'endofoncteur de $\mathcal{E}$ns-gr composé de $\widehat{\mathrm{L}}$ et du foncteur oubli, qu'on note encore $\widehat{\mathrm{L}}$. On note $\widehat{\mathcal{M}}$ la catégorie des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr.

Remarque. La composée du foncteur L et du foncteur oubli $\mathcal{M} \to \mathcal{E}\text{ns-gr}$ possède également une structure de monade. La catégorie des L-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr n'est rien d'autre que la catégorie $\mathcal{M}$ des MU^*-modules.

On dispose des foncteurs $\underset{\sim}{\mathcal{O}} : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{f}}$, qui associe à une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M l'ensemble gradué sous-jacent muni de la structure de MU^*-module filtré héritée de $\widehat{\mathrm{L}}(M)$, et $\widetilde{\mathcal{O}} : \mathcal{M}_{\mathrm{fc}} \to \widehat{\mathcal{M}}$, qui associe à un MU^*-module filtré complet N de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre formée de l'ensemble gradué sous-jacent à N et de l'application $\widehat{\mathrm{L}}(N) \to N$ adjointe dans $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ de l'identité de N, et des morphismes naturels $\widetilde{\mathcal{O}}\underset{\sim}{\mathcal{O}}M \to M$ pour $M \in \widehat{\mathcal{M}}$ tel que $\underset{\sim}{\mathcal{O}}M$ est complet et $\underset{\sim}{\mathcal{O}}\widetilde{\mathcal{O}}(N) \to N$ pour $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$. Le premier morphisme est l'identité de M. Le second est l'identité de N lorsque N est isomorphe au MU^*-module filtré $\widehat{\mathrm{L}}(S)$ pour un ensemble gradué S (cf proposition 1.2.2.5 où on a seulement un isomorphisme canonique). On en déduit que le foncteur $\widetilde{\mathcal{O}}$ induit un isomorphisme de la catégorie $\widehat{\mathcal{L}}$ sur la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{M}}$ formée des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres libres. Nous identifions ces deux catégories via cet isomorphisme.

La proposition 1.2.2.5 indique également que pour tout objet M de $\widehat{\mathcal{L}}$ le diagramme
$\widehat{\mathrm{L}}^2(M) \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow \widehat{\mathrm{L}}(M) \to M$ est un diagramme coégalisateur scindé dans $\widehat{\mathcal{M}}$.

Toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M est canoniquement le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr et $\widehat{\mathcal{M}}$ du 1-complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$ $\widehat{\mathrm{L}}^2M \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow \widehat{\mathrm{L}}(M)$. Inversement soit $M_1 \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow M_0$ un 1-complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$ et M son coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr ; les points (a) et (b) de la proposition 1.2.2.3 montre que M hérite d'une structure naturelle de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre qui en fait le coégalisateur de $M_1 \leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow M_0$ dans $\widehat{\mathcal{M}}$. On en déduit l'existence dans $\widehat{\mathcal{M}}$ de toutes les colimites indexées par une catégorie petite.

On vérifie que le produit de deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres est aussi leur somme (il suffit de le vérifier pour des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres libres et d'utiliser la commutation du produit aux coégalisateurs dans $\mathcal{E}$ns-gr). On en déduit que la catégorie $\widehat{\mathcal{M}}$ est additive. Observons que le foncteur oubli $\widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, composé du foncteur $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ et de l'oubli de la filtration $\mathcal{M}_{\mathrm{f}} \to \mathcal{M}$, est additif et commute aux limites (c'est une conséquence de la description de la limite d'un diagramme d'algèbres sur une monade). Il est exact à droite (le conoyau d'un morphisme de $\widehat{\mathcal{M}}$ coïncide avec le coégalisateur du 1-complexe associé) mais ne commute pas aux sommes infinies.

Soient $M \to M'$ un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres, K son noyau et Q son conoyau ; alors le conoyau de l'inclusion $K \to M$ s'identifie dans $\widehat{\mathcal{M}}$ au noyau de la projection $M' \to Q$ car ils s'identifient dans $\mathcal{M}$. La catégorie des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres est donc abélienne. La proposition 1.2.1.3 montre que les objets projectifs de $\widehat{\mathcal{M}}$ sont exactement les objets de $\widehat{\mathcal{L}}$.

Les deux lemmes qui suivent et la proposition qui en découle complètent la comparaison entre $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres et 1-complexes de $\widehat{\mathcal{L}}$. Notons que le noyau dans $\widehat{\mathcal{M}}$ d'un projecteur de $\widehat{\mathcal{L}}$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ (par la proposition 1.2.1.3) et que les sommes et produits coïncident dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ de sorte que la donnée d'un 1-complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$ est équivalente à celle d'un morphisme de $\widehat{\mathcal{L}}$.

LEMME 1.2.3.1. *Soient $f, g : \triangle \to \triangle'$ deux morphismes entre* 1*-complexes de $\widehat{\mathcal{L}}$; alors f et g sont homotopes en degré* 0 *si et seulement s'ils induisent le même morphisme entre les coégalisateurs de $\triangle$ et $\triangle'$ dans $\widehat{\mathcal{M}}$.*

Démonstration Le lemme s'obtient en remplaçant les 1-complexes de $\widehat{\mathcal{L}}$ par les morphismes de $\widehat{\mathcal{L}}$ correspondants. Soient $M_1 \to M_0$ et $N_1 \to N_0$ deux morphismes de $\widehat{\mathcal{L}}$ dont on note M et N les conoyaux respectifs dans $\widehat{\mathcal{M}}$. La suite de MU^*-modules $N_1 \to N_0 \to N \to 0$ est exacte. Comme M_0 est dans $\widehat{\mathcal{L}}$, il existe un ensemble gradué S et une application $S \to M_0$ induisant un isomorphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to M_0$ dans $\widehat{\mathcal{M}}$. On en déduit par adjonction qu'un morphisme $M_0 \to N_0$ induit le morphisme nul $M_0 \to N$ si et seulement s'il se relève en un morphisme de M_0 dans N_1. Le lemme s'en déduit. $\square$

LEMME 1.2.3.2. *Soient $M_1 \leftrightarrows M_0$ un* 1*-complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$ et M son coégalisateur dans $\widehat{\mathcal{M}}$; alors il existe une équivalence d'homotopie en degré* 0 *du* 1*-complexe $\widehat{\mathrm{L}}^2(M) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(M)$ dans $M_1 \leftrightarrows M_0$ induisant l'identité de M, unique à homotopie en degré* 0 *près.*

Démonstration. M_1 et M_0 sont canoniquement les coégalisateurs des 1-complexes $\widehat{\mathrm{L}}^2(M_1) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(M_1)$ et $\widehat{\mathrm{L}}^2(M_0) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(M_0)$ respectivement. On définit d_0, respectivement $d_1 : \widehat{\mathrm{L}}(M_1) \oplus \widehat{\mathrm{L}}^2(M_0) \to \widehat{\mathrm{L}}(M_0)$, comme la somme des d_0, respectivement des $d_1 : \widehat{\mathrm{L}}(M_1) \to \widehat{\mathrm{L}}(M_0)$ et $\widehat{\mathrm{L}}^2(M_0) \to \widehat{\mathrm{L}}(M_0)$; de même on construit une section commune de d_0 et d_1 comme le produit des sections communes. On dispose des morphismes canoniques de $\widehat{\mathrm{L}}(M_1) \oplus \widehat{\mathrm{L}}^2(M_0) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(M_0)$ dans $M_1 \leftrightarrows M_0$ et $\widehat{\mathrm{L}}^2(M) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(M)$ respectivement, qui induisent des isomorphismes entre les coégalisateurs. On conclut en observant qu'un morphisme entre 1-complexes $P_1 \leftrightarrows P_0$ et $Q_1 \leftrightarrows Q_0$ de $\widehat{\mathcal{L}}$ qui induit un isomorphisme entre les coégalisateurs dans $\mathcal{M}$ et qui est tel que le morphisme de P_0 dans Q_0 est surjectif admet un inverse à homotopie en degré 0 près : il suffit de choisir une section de $P_0 \to Q_0$ dans $\widehat{\mathcal{L}}$ (cf la proposition 1.2.1.3) et un morphisme $Q_1 \to P_1$ relevant cette section. □

Proposition 1.2.3.3. *Le foncteur de la catégorie des* 1*-complexes de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *dans la catégorie des* $\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbres, qui associe à un* 1*-complexe son coégalisateur dans* $\widehat{\mathcal{M}}$*, induit une équivalence entre la catégorie des* 1*-complexes de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *et classes d'homotopie en degré* 0 *de morphismes et la catégorie* $\widehat{\mathcal{M}}$*.*

Démonstration. Le foncteur de la catégorie des 1-complexes de $\widehat{\mathcal{L}}$ dans $\widehat{\mathcal{M}}$ se factorise en un foncteur de la catégorie des 1-complexes et classes d'homotopie en degré 0 de morphismes dans $\widehat{\mathcal{M}}$ par le lemme 1.2.2.1. Le foncteur qui associe à une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre S le 1-complexe $\widehat{\mathrm{L}}^2(S) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(S)$ en est un inverse par le lemme qui précède. □

$\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbres, structure de* MU**-module et filtration*

Nous revenons dans ce paragraphe sur les liens entre la catégorie $\widehat{\mathcal{M}}$ et les catégories $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$.

Soit L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$; alors L est complet pour la filtration p-adique ; en particulier sa structure de MU*-module s'étend en une structure de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module canonique. On en déduit que le MU*-module sous-jacent à une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module et qu'il est Ext-p-complet (*i.e.*dans l'image du foncteur $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, -)$, lequel est exact à droite ; voir [BK, chap. VI]).

Le foncteur oubli $\mathcal{O}' : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ est additif et exact (mais ne commute pas aux sommes infinis) ; il admet un adjoint à gauche par la proposition 1.2.2.6 qu'on note $\widehat{\mathrm{L}}'$. Si M est un MU*-module libre alors $\widehat{\mathrm{L}}'(M)$ s'identifie par construction à l'objet $\widehat{M}$ de $\widehat{\mathcal{L}}$ et $\widehat{\mathrm{L}}'$ est étendu à $\mathcal{M}$ entier en forçant la commutation aux coégalisateurs.

L'adjonction munit la composée de $\widehat{\mathrm{L}}'$ avec le foncteur oubli d'une structure de monade sur $\mathcal{M}$, qu'on note encore $\widehat{\mathrm{L}}'$. On déduit également de l'adjonction le foncteur $\widetilde{\mathcal{O}}' : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}(\widehat{\mathrm{L}}')$ qui associe à une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M la structure de $\widehat{\mathrm{L}}'$-algèbre sur le MU^*-module sous-jacent à M.

On note $\mathcal{M}^0$ et $\widehat{\mathcal{M}}^0$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{M}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ formées des objets nuls en degré assez grand.

Proposition 1.2.3.4.

(a) *Le foncteur* $\widetilde{\mathcal{O}}' : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}(\widehat{\mathrm{L}}')$ *est un isomorphisme de catégories.*

(b) *La restriction de la monade* $\widehat{\mathrm{L}}'$ *à* $\mathcal{M}^0$ *est un idempotent de* $\mathcal{M}^0$ *d'image la sous-catégorie pleine formée des* MU^**-modules* Ext-p*-complets. En particulier le foncteur oubli* $\widehat{\mathcal{M}}^0 \to \mathcal{M}^0$ *induit une équivalence de catégories entre* $\widehat{\mathcal{M}}^0$ *et la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{M}^0$ *formée des modules* Ext-p*-complets.*

Démonstration. Le foncteur $\widetilde{\mathcal{O}}' : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}(\widehat{\mathrm{L}}')$ est un isomorphisme par la proposition 1.2.2.6. Il induit encore un isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{M}}^0$ et $\mathcal{M}^0(\widehat{\mathrm{L}}')$.

Soit M un objet de $\mathcal{M}^0$, le MU^*-module $\widehat{\mathrm{L}}'(M)$ est le complété de M pour la filtration p-adique si M est libre donc le Ext-p-complété de M en général. On en déduit que le morphisme $\eta(M) : M \to \widehat{\mathrm{L}}'(M)$ est l'identité si et seulement si M est Ext-p-complet, en particulier si M est dans l'image de $\widehat{\mathrm{L}}'$, donc que $\mu(M)$ et $\widehat{\mathrm{L}}'(\eta(M))$ sont toujours l'identité ($\mu(M)$ est un inverse à gauche de $\eta(\widehat{\mathrm{L}}'(M))$ et de $\widehat{\mathrm{L}}'(\eta(M))$). En particulier, si M est Ext-p-complet, l'identité de M fait de M une $\widehat{\mathrm{L}}'$-algèbre. Inversement soit M une $\widehat{\mathrm{L}}'$-algèbre nulle en degré assez grand ; alors le 1-complexe $\widehat{\mathrm{L}}'^2(M) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}'(M)$ est le 1-complexe constant $\widehat{\mathrm{L}}'(M) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}'(M)$ donc $\widehat{\mathrm{L}}'(M) \to M$ est iso donc M est Ext-p-complet et $\widehat{\mathrm{L}}'(M) \to M$ est l'identité de M. $\square$

Nous donnons maintenant le lien entre $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres et MU^*-modules filtrés complets.

Rappelons que toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M hérite de $\widehat{\mathrm{L}}(M)$ d'une filtration plus grossière que la filtration par les coefficients de sorte qu'on obtient un foncteur oubli $\underset{\sim}{\mathcal{O}} : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{f}}$. Le module filtré sous-jacent à M se surjecte sur son complété mais n'est pas en général séparé pour la filtration. Observons que la filtration d'une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre nulle en degré assez grand est la filtration par les coefficients. Observons également que le foncteur $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ est additif, exact à droite et qu'il commute aux produits, mais il n'est pas exact à gauche.

Rappelons également que l'ensemble gradué sous-jacent à un objet complet N de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ hérite d'une structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre qu'on note $\widetilde{\mathcal{O}}(N)$. On dispose d'un morphisme canonique $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(N) \to N$ qui est l'identité dans $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ mais pas dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ en général. Notons que le morphisme de structure $\widehat{\mathrm{L}}(\widetilde{\mathcal{O}}(N)) \to \widetilde{\mathcal{O}}(N)$ est caractérisé par le fait que c'est un morphisme dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ puisqu'il est alors adjoint dans $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ de l'identité de N ; autrement dit il existe une seule structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sur l'ensemble gradué sous-jacent à N compatible avec la filtration de N.

Nous dirons que la filtration d'un objet M de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ est fermante ou pour abréger que M est f-filtré si l'inclusion $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^* \cdot M + \mathrm{f}^{n+1}M \subset \mathrm{f}^n M$ est une bijection pour tout entier n. (Cette condition est équivalente à la condition (2) du lemme 1.2.1.2.)

Exemples. Le complété $\widehat{M}$ d'un MU^*-module M est f-filtré ; le coégalisateur dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ d'un 1-complexe de MU^*-modules f-filtrés est f-filtré.

On note $\mathcal{M}_{\mathrm{f\text{-}fc}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ formée des MU^*-modules f-filtrés complets.

LEMME 1.2.3.5. *Soit M un objet complet de $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$; alors $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(M)$ est complet.*

Démonstration. La filtration de M induite par celle de $\widehat{\mathrm{L}}(M)$ est plus fine que la filtration originelle de M donc $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(M)$ est séparé. D'autre part $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(M)$ se surjecte sur son complété pour la filtration : Notons K_n le MU^*-module image de $\mathrm{d}_0 - \mathrm{d}_1 : \widehat{\mathrm{L}}^2(M) \to \widehat{\mathrm{L}}(M)$. Les K_n forment une tour de surjections et la suite $0 \to \mathrm{K}_n \to \widehat{\mathrm{L}}(M)/\mathrm{f}^n \to \underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(M)/\mathrm{f}^n \to 0$ est exacte donc l'application $\widehat{\mathrm{L}}(M) \to \lim_n \underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(M)/\mathrm{f}^n$ est surjective, or celle-ci se factorise par l'application $\widehat{\mathrm{L}}(M) \to \underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}}(M)$. □

PROPOSITION 1.2.3.6. *Le foncteur $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}\widetilde{\mathcal{O}} : \mathcal{M}_{\mathrm{fc}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ est un idempotent d'image la sous-catégorie pleine $\mathcal{M}_{\mathrm{f\text{-}fc}}$ formée des MU^*-modules f-filtrés complets. En particulier le foncteur oubli $\widehat{\underset{\sim}{\mathcal{M}}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine de $\widehat{\underset{\sim}{\mathcal{M}}}$ formée des objets complets pour la filtration et la catégorie $\mathcal{M}_{\mathrm{f\text{-}fc}}$.*

Démonstration. Notons $\widehat{\mathcal{M}}_c$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{M}}$ formée des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres M telles que $\underset{\sim}{\mathcal{O}}M$ est dans $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$. Le lemme ci-dessus montre que le foncteur $\widetilde{\mathcal{O}}$ est à valeur dans $\widehat{\mathcal{M}}_c$. Le lemme 1.2.2.4 montre alors que $\underset{\sim}{\mathcal{O}} : \widehat{\mathcal{M}}_c \to \mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$ est adjoint à gauche de $\widetilde{\mathcal{O}}$. D'autre part pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre complète le morphisme canonique $\widetilde{\mathcal{O}}\underset{\sim}{\mathcal{O}}M \to M$ est l'identité par construction de $\widetilde{\mathcal{O}}$. On en déduit que le foncteur $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ induit un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{M}}_c$ sur son image dans $\mathcal{M}_{\mathrm{fc}}$.

Il est clair que la restriction de $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ à $\widehat{\mathcal{M}}_c$ est à valeurs dans $\mathcal{M}_{\text{f-fc}}$. Soit réciproquement M un MU^*-module f-filtré complet ; alors le morphisme $\underset{\sim}{\mathcal{O}}\widetilde{\mathcal{O}}(M) \to M$ est l'identité par le lemme suivant qui généralise l'équivalence entre les points (i) et (iii) du corollaire 1.2.1.4 :

LEMME 1.2.3.7. *Soit $M \to N$ un morphisme de $\mathcal{M}_{\text{f-fc}}$ qui est un isomorphisme de* MU^**-modules ; alors $M \to N$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{\text{f-fc}}$.*

Démonstration. On introduit comme pour la démonstration du point (a) de la proposition 1.2.1.3 le noyau K_n de la surjection $M/\mathrm{f}^n \to N/\mathrm{f}^n$. Le fait que M et N sont f-filtrés implique que la tour des K_n est une tour de surjections. Le fait que l'application $M \to N$ est bijective implique que la limite des K_n est nulle donc chacun des K_n est nul. □

□

Sous-$\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbres et* $\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbres quotient*

Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre ; une sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de M est un sous-ensemble gradué M' muni d'une structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre telle que l'inclusion $M' \to M$ soit un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres. De même une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient est un ensemble gradué quotient muni d'une structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre compatible. Les structures compatibles de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sur un sous-ensemble gradué ou un ensemble gradué quotient de M, lorsqu'elle existent, sont uniques.

LEMME 1.2.3.8. *Soient T une monade sur* $\mathcal{E}$ns-gr *et $M \to M'$ un morphisme de T-algèbres ; alors l'ensemble gradué I image de M dans M' possède une unique structure de T-algèbre faisant de l'inclusion de I dans M' un morphisme de T-algèbres.*

Démonstration. La composée $T(M) \to T(M') \to M'$ est d'image I dans $\mathcal{E}$ns-gr et se factorise par la surjection $T(M) \to T(I)$ (observons que l'application $M \to I$ admet une section, donc également l'application $T(M) \to T(I))$ d'où une application de $T(I)$ dans I. On vérifie que cette application fait de I une T-algèbre. L'unicité vient de ce que la composée $T(I) \to T(M') \to M'$ se factorise par le morphisme de structure $T(I) \to I$ et de ce que l'application $I \to M'$ est injective. $\square$

Le lemme montre que pour tout sous-ensemble gradué S de M il existe une plus petite sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de M contenant S : c'est l'image du morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to M$ adjoint de l'inclusion $S \to M$. Symétriquement pour tout ensemble gradué quotient S de M il existe une plus grande $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient de M qui soit un quotient de S : c'est la somme amalgamée dans $\widehat{\mathcal{M}}$ de M et de $\widehat{\mathrm{L}}(S)$ sous $\widehat{\mathrm{L}}(M)$.

Remarque. Toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M est un quotient de l'objet $\widehat{\mathrm{L}}(M)$ de $\widehat{\mathcal{L}}$. Soient M_0 et N_0 deux objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ et M, N des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres quotient de M_0 et N_0 respectivement ; un morphisme d'ensembles gradués $M \to N$ est un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres si et seulement s'il se relève en un morphisme $M_0 \to N_0$ dans $\widehat{\mathcal{L}}$.

Exemples.

- Soit $M \to M'$ un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres. L'exactitude du foncteur oubli $\widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ se traduit par le fait que le noyau et le conoyau du morphisme de MU^*-modules sous-jacent sont respectivement une sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de M et une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient de M'.

- Soit M un MU^*-module f-filtré complet. Toute sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de M est complète pour sa filtration car elle est séparée pour la filtration induite par celle de M et se surjecte sur son complété (cf la démonstration du lemme 1.2.3.5). Par contre elle n'est pas nécessairement complète pour la filtration induite par celle de M (*i.e.*fermée dans M pour la topologie de M). De façon équivalente une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient de M n'est pas nécessairement complète. Les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres quotient complètes sont exactement les MU^*-modules quotient séparés pour la topologie induite par M.

- Pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M et tout entier n, le MU^*-module M/f^n muni de la filtration par les coefficients est f-filtré complet et la surjection $M \to M/\mathrm{f}^n$ en fait une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient de M. En particulier le MU^*-module $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n$ muni de la filtration par les coefficients est une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient de l'objet $\widehat{\mathrm{MU}}^*$ de $\widehat{\mathcal{L}}$. Observons que le foncteur $\widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, $M \mapsto M/\mathrm{f}^n$ commute aux sommes infinies (donc à toutes les colimites) mais pas le foncteur $\widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}$, $M \mapsto M/\mathrm{f}^n$.

Filtration squelettale d'une $\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbre*

Pour tout objet L de $\widehat{\mathcal{L}}$ et tout entier n on note F^nL la sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de L engendrée par les éléments de degré supérieur ou égal à n ; c'est un facteur direct de L. La suite des F^nL forme une filtration décroissante et d'intersection nulle de L dans $\widehat{\mathcal{M}}$.

Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre ; elle est le conoyau d'un morphisme canonique $\widehat{\mathrm{L}}^2(M) \to \widehat{\mathrm{L}}(M)$. On définit pour tout entier n la sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre F^nM comme l'image dans M du conoyau du morphisme $\mathrm{F}^n\widehat{\mathrm{L}}^2(M) \to \mathrm{F}^n\widehat{\mathrm{L}}(M)$, de sorte que le quotient M/F^nM, qu'on note pour abréger M/F^n, est le conoyau du morphisme $\widehat{\mathrm{L}}^2(M)/\mathrm{F}^n \to \widehat{\mathrm{L}}(M)/\mathrm{F}^n$. Le foncteur $\widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}$, $M \mapsto M/\mathrm{F}^n$ est exact à droite.

La suite des F^nM forment une filtration décroissante de M par des sous-$\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres, pas nécessairement complète, qu'on appelle la filtration squelettale de M.

Lemme 1.2.3.9. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre admettant une présentation $M_1 \to M_0 \to M$ dans $\widehat{\mathcal{L}}$ telle que M_1/f^1 et M_0/f^1 sont finis en chaque degré et nuls en degré assez petit ; alors la filtration squelettale de M est complète.*

Démonstration. Pour tout entier s les $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules M_1/F^s et M_0/F^s sont de type fini, donc également le noyau qu'on note K_s du morphisme $M_1/\mathrm{F}^s \to M_0/\mathrm{F}^s$. On en déduit que la tour (K_s) est sans $\lim^1$ puis que la suite $\lim_s M_1/\mathrm{F}^s \to \lim_s M_0/\mathrm{F}^s \to \lim_s M/\mathrm{F}^s \to 0$ est exacte, ce qui permet de conclure. $\square$

Produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{M}}$

Nous revenons d'abord sur le produit tensoriel de deux objets de $\widehat{\mathcal{L}}$.

Soient M et N dans $\widehat{\mathcal{L}}$, on définit leur produit tensoriel $M\widehat{\otimes}N$ comme le MU^*-module filtré complet donné par $(M\widehat{\otimes}N)/\mathrm{f}^n = \lim_s((M/\mathrm{F}^s)/\mathrm{f}^n \otimes_{\mathrm{MU}^*} (N/\mathrm{F}^s)/\mathrm{f}^n)$ (donc $(M\widehat{\otimes}N)/\mathrm{f}^1$ en degré k est le produit $\prod_{i+j=k}(M/\mathrm{f}^1)^i \otimes_{\mathbb{Z}/p} (N/\mathrm{f}^1)^j)$; alors $M\widehat{\otimes}N$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et coïncide avec le produit tensoriel de M et N défini en section 1.1.1 si M/f^1 et N/f^1 sont nuls en degré assez petit.

Les morphismes $M \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} N \to M/\mathrm{f}^n \otimes_{\mathrm{MU}^*} N/\mathrm{f}^n$ induisent un morphisme de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules $M \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} N \to M\widehat{\otimes}N$.

Lemme 1.2.3.10. *Soient M et N deux objets de $\widehat{\mathcal{L}}$; alors le morphisme $M \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} N \to M\widehat{\otimes}N$ est un isomorphisme (de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules) si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) *M et N sont nuls en degré assez grand et M/f^1 ou N/f^1 est fini en chaque degré.*

(2) *M/f^1 ou N/f^1 est fini.*

Soient maintenant M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres. On définit leur produit tensoriel $M\widehat{\otimes}N$ comme le coégalisateur du 1-complexe $\widehat{\mathrm{L}}^2(M)\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{L}}^2(N) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}(M)\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{L}}(N)$ défini par les morphismes $\mathrm{d}_0\widehat{\otimes}\mathrm{d}_0$, $\mathrm{d}_1\widehat{\otimes}\mathrm{d}_1$ et $\mathrm{s}_0\widehat{\otimes}\mathrm{s}_0$; c'est aussi le conoyau du morphisme $\widehat{\mathrm{L}}^2(M)\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{L}}(N) \oplus \widehat{\mathrm{L}}(M)\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{L}}^2(N) \to \widehat{\mathrm{L}}(M)\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{L}}(N)$ induit par les morphismes $\mathrm{d}_0 - \mathrm{d}_1$.

On dispose d'un morphisme canonique de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules $M \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} N \to M\widehat{\otimes}N$. Le lemme 1.2.3.10 fournit des critères pour que ce morphisme soit un isomorphisme ; voir aussi la proposition 1.4.1.11 dans la section 1.4. En particulier les isomorphismes canoniques de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules $\widehat{\mathrm{MU}}^* \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} M \to M$ et $M \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} \widehat{\mathrm{MU}}^* \to M$ induisent des isomorphismes $\widehat{\mathrm{MU}}^*\widehat{\otimes}M \to M$ et $M\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{MU}}^* \to M$.

Lemme 1.2.3.11. *Soient M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres et n un entier ; alors le morphisme $M/\mathrm{f}^n \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} N/\mathrm{f}^n \to M/\mathrm{f}^n\widehat{\otimes}N/\mathrm{f}^n$ est un isomorphisme de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules.*

Démonstration. On le vérifie d'abord lorsque M et N sont libres. Le cas général s'obtient en écrivant M et N comme les coégalisateurs de 1-complexes de $\widehat{\mathcal{L}}$ et en utilisant l'exactitude à droite des produits tensoriels. □

Remarquons que le produit tensoriel intervenant à gauche peut être pris comme le produit tensoriel sur $\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n$.

Exemple. Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et n un entier ; alors la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $M\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n$ s'identifie au quotient M/f^n.

Présentation de la MU*-cohomologie continue des espaces profinis*

Rappelons que l'adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{K}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{ns-gr}}(S, \mathrm{MU}^*X)$ munit le foncteur $\mathrm{G} : \mathcal{E}\text{ns-gr} \to \mathcal{E}\text{ns-gr}, S \mapsto \mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S)$ d'une structure de monade et que la MU-cohomologie continue d'un espace profini X est une G-algèbre de $\mathcal{E}$ns-gr (nous reviendrons sur les G-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr à la prochaine section). Le 1-complexe $\mathrm{G}^2(\mathrm{MU}^*X) \leftrightarrows \mathrm{G}(\mathrm{MU}^*X)$ de $\widehat{\mathcal{L}}$ dont MU^*X est le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr munit la MU-cohomologie continue de X d'une structure canonique de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre. Il est induit par le

1-cocomplexe $\mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X) \leftrightarrows \mathrm{K}(\mathrm{G}(\mathrm{MU}^*X))$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ associé à la structure de monade du foncteur $X \mapsto \mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X)$.

La filtration de MU^*X provenant de sa structure de G-algèbre est plus fine que la filtration limite induite par la filtration par les coefficients de la MU-cohomologie continue des squelettes de X. Les deux filtrations coïncident lorsque X est de dimension finie (la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre MU^*X est alors nulle en degré assez grand donc sa filtration est la filtration par les coefficients) ou lorsque la filtration limite est fermante et complète (nous montrerons plus loin qu'il en est ainsi lorsque X est le complété profini d'un espace). En particulier lorsque l'espace profini X est sans p-torsion, la structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de MU^*X issue de sa structure de G-algèbre coïncide avec sa structure d'objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ issue de la filtration limite.

Notons que lorsque X est de dimension finie, on peut choisir un 1-cocomplexe $X^0 \leftrightarrows X^1$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ formé d'espaces profinis de dimension finie et sans p-torsion et une application de X dans X^0 tels que le diagramme induit en MU-cohomologie continue soit une présentation de MU^*X dans $\widehat{\mathcal{L}}$: L'application $X \to \mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X)$ se factorise par un squelette X^0 de $\mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X)$, lequel est sans p-torsion. Notons C la cofibre de l'application $X \to X^0$ et choisissons de même un squelette X^1 de $\mathrm{K}(\mathrm{MU}^*C)$ par lequel se factorise l'application $C \to \mathrm{K}(\mathrm{MU}^*C)$; alors le 1-cocomplexe $X^0 \leftrightarrows X^0 \times X^1$ associé à l'application $X^0 \to X^1$ convient.

Pour X et Y deux espaces profinis, les formules de Künneth pour la MU-cohomologie continue des produits $\mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X) \times \mathrm{K}(\mathrm{MU}^*Y)$ et $\mathrm{K}(\mathrm{G}(\mathrm{MU}^*X)) \times \mathrm{K}(\mathrm{G}(\mathrm{MU}^*Y))$ induisent un morphisme $\mathrm{MU}^*X \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X \times Y$ qui n'est pas un isomorphisme en général (la MU-cohomologie continue du produit $X \times Y$ n'est pas le coégalisateur du diagramme formé). Nous construirons plus loin la suite spectrale aboutissant à la MU-cohomologie continue de $X \times Y$.

1.3. Structure d'algèbre instable

On note $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ la catégorie des G-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr. Les objets de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ sont appelées MU-algèbres instables.

Remarque. Les travaux de Ravenel et Wilson ([RW]) montrent que la monade G peut être définie en terme de la loi de groupe formel de MU, donc sans passer par la catégorie homotopique $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$.

Exemples.

– L'image par G d'un ensemble gradué S est la MU-algèbre instable libre sur S : l'application $S \mapsto \mathrm{G}(S)$ induit une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{G}(S), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{ns-gr}}(S, N)$ pour tout MU-algèbre instable N.

– Soit X un espace profini ; l'image en MU-cohomologie de l'application canonique $X \to \mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X)$ fait de la MU-cohomologie continue de X une MU-algèbre instable fonctoriellement en X.

Pour tout objet M de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, le diagramme $\mathrm{G}^2(M) \leftrightarrows \mathrm{G}(M)$, dont M est le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr, est un 1-complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$. On en déduit une structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sur M, c'est à dire un foncteur oubli $\mathcal{O}' : \mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \widehat{\mathcal{M}}$.

Le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr d'un 1-complexe de G-algèbres hérite d'une structure de G-algèbre qui en fait le coégalisateur du 1-complexe dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ par les points (a) et (b) de la proposition 1.2.2.3. On en déduit l'existence des colimites indexées par une catégorie petite dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Notons que le foncteur oubli $\mathcal{O}'$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes mais pas aux coégalisateurs en général.

Toutes les limites indexées par une catégorie petite existent dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ et l'oubli $\mathcal{O}'$ commute aux limites. La proposition 1.2.2.6 montre que $\mathcal{O}'$ admet un adjoint à gauche G' et que le foncteur associé $\widetilde{\mathcal{O}}' : \mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \widehat{\mathcal{M}}(\mathcal{O}'\mathrm{G}')$ est un isomorphisme de catégories. On notera encore G' la composée de G' et de l'oubli $\mathcal{O}'$. Nous considérerons les MU-algèbres instables indifféremment comme des G-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr ou comme des G'-algèbres de $\widehat{\mathcal{M}}$.

Par construction, l'image par G' de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre libre sur un ensemble gradué S est la G-algèbre libre sur S. On en déduit que l'image par G' d'un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$.

Proposition 1.3.1. *Soit L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$.*

(a) *Le foncteur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{E}$ns-gr, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{M}}}(L, \mathrm{MU}^*X)$ est représentable par un espace profini sans p-torsion qu'on note $\mathrm{K}'(L)$.*

(b) *Le morphisme d'algèbres instables $\mathrm{G}'(L) \to \mathrm{MU}^*\mathrm{K}'(L)$, adjoint de l'unité d'adjonction $L \to \mathrm{MU}^*\mathrm{K}'(L)$, est un isomorphisme naturel compatible avec les structures de monade de G' et de $L \mapsto \mathrm{MU}^*\mathrm{K}'(L)$.*

Démonstration. Choisissons un ensemble gradué S et un isomorphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to L$. Le foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\widehat{\mathrm{L}}(S), \mathrm{MU}^*X)$ est représenté par l'espace profini $\mathrm{K}(S)$ et le morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to \mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S)$ adjoint dans $\widehat{\mathcal{M}}$ de l'unité $S \to \mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S)$ sur $\widehat{\mathcal{L}}$. L'espace profini $\mathrm{K}(S)$ représente encore le foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{M}}}(L, \mathrm{MU}^*X)$. Notons que la fonctorialité en L du représentant dépend d'un choix. Le point (b) est formel. $\square$

Version réduite

L'objet $\widehat{\mathrm{MU}}^*$, image par G de l'objet initial $\emptyset$ de $\mathcal{E}$ns-gr, est un objet initial dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Pour tout espace profini pointé X, l'application pt $\to X$ induit un rétract du morphisme $\widehat{\mathrm{MU}}^* \to \mathrm{MU}^*X$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$; on dit que l'algèbre instable MU^*X est augmentée.

Soit S un ensemble gradué ; l'application constante égale à 0 de S dans $\widehat{\mathrm{MU}}^*$ munit l'espace profini $\mathrm{K}(S)$ d'un point base (défini à homotopie près : le morphisme pt $\to \mathrm{K}(S)$ est l'unique morphisme de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ entre pt et $\mathrm{K}(S)$ respectant la structure d'objet en cogroupe abélien de chacun des termes) et l'algèbre instable $\mathrm{G}(S)$ d'une augmentation. On note $\widetilde{\mathrm{G}}(S)$ le noyau dans $\widehat{\mathcal{M}}$ du morphisme $\mathrm{G}(S) \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$, *i.e.*la MU-cohomologie continue réduite de $\mathrm{K}(S)$. La $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{G}(S)$ est alors canoniquement la somme directe de $\widetilde{\mathrm{G}}(S)$ et de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$.

Lemme 1.3.2. *Soit X un espace profini pointé et S un ensemble gradué, alors la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{K}(S)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{ns-gr}}(S, \mathrm{MU}^*X)$ induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(X, \mathrm{K}(S)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{ns-gr}}(S, \widetilde{\mathrm{MU}}^*X) \ .$$

Démonstration. C'est vrai pour X_+ (la réunion disjointe de X et d'un point base) donc également pour $\Sigma(X_+) = (\Sigma X) \vee \Sigma(\mathrm{pt}_+)$, donc pour ΣX donc pour X. $\square$

On déduit du lemme une structure de monade sur $\widetilde{\mathrm{G}} : \mathcal{E}\text{ns-gr} \to \mathcal{E}\text{ns-gr}$. Observons que cette structure se déduit de celle de G : l'application $S \to \widetilde{\mathrm{G}}(S)$ est la restriction au but de $S \to \mathrm{G}(S)$ et l'application $\widetilde{\mathrm{G}}^2(S) \to \widetilde{\mathrm{G}}(S)$ est induite par la restriction de $\mathrm{G}^2(S) \to \mathrm{G}(S)$ à $\mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{G}})(S)$. En particulier l'inclusion $\widetilde{\mathrm{G}}(S) \to \mathrm{G}(S)$ est un morphisme de monades et toute G-algèbre est naturellement une $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre.

On note $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}$ la catégorie des $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr ; ses objets sont appelés MU-algèbres instables non unitaires. Le foncteur oubli $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}$ décrit ci-dessus est exact à gauche ; il admet un adjoint à gauche $M \mapsto M_+$ qui mime l'adjonction entre $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ et $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ et est construit comme suit : Si

M est la $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre libre sur un ensemble gradué S on pose $M_+ = \mathrm{G}(S) = \widetilde{\mathrm{G}}(S) \oplus \widehat{\mathrm{MU}}^*$; c'est un foncteur en $\widetilde{\mathrm{G}}(S)$. Pour M quelconque on définit M_+ comme le coégalisateur du 1-complexe de G-algèbres $\widetilde{\mathrm{G}}^2(M)_+ \leftrightarrows \widetilde{\mathrm{G}}(M)_+$; il s'identifie au produit $M \oplus \widehat{\mathrm{MU}}^*$ comme $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre et apparaît canoniquement comme une G-algèbre augmentée.

Inversement si M est une G-algèbre augmentée alors $\widetilde{M} = \mathrm{Ker}(M \to \widehat{\mathrm{MU}}^*)$ est une $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre. Notons $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}0}$ la catégorie des G-algèbres augmentées ; les foncteurs $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}-} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}0}$, $M \mapsto M_+$ et $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}0} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}-}$, $M \mapsto \widetilde{M}$ sont des équivalences de catégories inverses l'un de l'autre. Nous verrons plus loin que toute G-algèbre non nulle admet une augmentation.

Observons que l'algèbre instable non unitaire nulle est l'objet initial et terminal de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}-}$. Le noyau dans $\widehat{\mathcal{M}}$ d'un morphisme $M \to N$ entre algèbres instables non unitaires est une sous-$\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre de M (cf la description de la limite d'un diagramme d'algèbres sur une monade) ; de même l'image dans $\mathcal{E}$ns-gr ou $\widehat{\mathcal{M}}$ de ce morphisme est une sous-$\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre de N par le lemme 1.2.3.8.

On définit de même pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $M\widetilde{\mathrm{G}}'(M)$ comme le noyau du morphisme $\mathrm{G}'(M) \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, adjoint du morphisme nul $M \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$. On vérifie que la structure de monade sur G' induit une structure de monade sur $\widetilde{\mathrm{G}}'$ et que la catégorie des $\widetilde{\mathrm{G}}'$-algèbres de $\widehat{\mathcal{M}}$ est isomorphe à celle des $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr (ou, de façon équivalente, que $\widetilde{\mathrm{G}}' : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}-}$ est adjoint à gauche de l'oubli $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}-} \to \widehat{\mathcal{M}}$).

Soit maintenant L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$. La bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{K}'(L)) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{M}}}(L, \mathrm{MU}^*X)$ induit pour tout espace profini pointé X une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(X, \mathrm{K}'(L)) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{M}}}(L, \widetilde{\mathrm{MU}}^*X)$ et le morphisme $\widetilde{\mathrm{G}}'(L) \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}'(L)$, adjoint de l'unité $L \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}'(L)$, est un isomorphisme naturel compatible avec les structures de monade de $\widetilde{\mathrm{G}}'$ et de $L \mapsto \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}'(L)$ sur $\widehat{\mathcal{L}}$.

Remarque. La structure multiplicative du spectre MU induit une structure de monade sur le foncteur $\mathrm{h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}} \to \mathrm{h}\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}$, $X \mapsto \Omega_\infty(\mathrm{MU} \wedge X)$. Si X est un espace pointé connexe dont la cohomologie à coefficients p-adiques est libre et de dimension finie en chaque degré alors l'espace $\Omega_\infty(\mathrm{MU} \wedge X)$ a la même propriété (cf [DL, appendice]) et on dispose d'un isomorphisme $(\Omega_\infty(\mathrm{MU} \wedge X))\widehat{\ }(-) \to \mathrm{K}'(\widetilde{\mathrm{MU}}^*\widehat{X}(-))$ dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ induisant un isomorphisme $\widetilde{\mathrm{G}}(\widehat{\mathrm{MU}}^*X) \to \widehat{\mathrm{MU}}^*\Omega_\infty(\mathrm{MU} \wedge X)$ compatible avec les structures de monades.

La structure de MU-algèbre instable non unitaire sur la MU-cohomologie complétée en p réduite de tels espaces coïncide donc avec celle définie dans [BCM] (à dualité près).

MU-*algèbres instables et produit tensoriel*

Soient S et S' deux ensembles gradués et notons $S \cup S'$ leur réunion disjointe. L'espace profini $\mathrm{K}(S \cup S')$ est par définition le produit $\mathrm{K}(S) \times \mathrm{K}(S')$. L'isomorphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{G}(S) \widehat{\otimes} \mathrm{G}(S') \to \mathrm{G}(S \cup S')$ donné par la formule de Künneth fait du produit tensoriel $\mathrm{G}(S) \widehat{\otimes} \mathrm{G}(S')$ une G-algèbre (libre) fonctoriellement en $\mathrm{G}(S)$ et $\mathrm{G}(S')$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Soient maintenant M et N deux MU-algèbres instables, alors $M \widehat{\otimes} N$ est canoniquement le coégalisateur dans $\widehat{\mathcal{M}}$ du 1-complexe de G-algèbres $\mathrm{G}^2(M) \widehat{\otimes} \mathrm{G}^2(N) \leftrightarrows \mathrm{G}(M) \widehat{\otimes} \mathrm{G}(N)$ de sorte que $M \widehat{\otimes} N$ hérite d'une structure de G-algèbre naturelle en M et N.

Proposition 1.3.3. *Soient M et N deux* MU-*algèbres instables.*

(a) *Les isomorphismes canoniques $\widehat{\mathrm{MU}}^* \widehat{\otimes} M \to M$ et $M \widehat{\otimes} \widehat{\mathrm{MU}}^* \to M$ dans $\widehat{\mathcal{M}}$ sont des isomorphismes dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.*

(b) *Les morphismes $M = M \widehat{\otimes} \widehat{\mathrm{MU}}^* \to M \widehat{\otimes} N$ et $N = \widehat{\mathrm{MU}}^* \widehat{\otimes} N \to M \widehat{\otimes} N$, induits par les morphismes $\widehat{\mathrm{MU}}^* \to M$ et $\widehat{\mathrm{MU}}^* \to N$, font de $M \widehat{\otimes} N$ la somme de M et N dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.*

Démonstration. On se ramène au cas "tautologique" où M et N sont les G-algèbres libres sur des ensembles gradués S et S'. $\square$

De même pour M et N deux MU-algèbres instables non unitaires, le produit tensoriel $M \widehat{\otimes} N$ a une structure naturelle de MU-algèbres instables non unitaire qui s'interprète comme celle associée au noyau du morphisme canonique de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}0}$ de la somme $M_+ \widehat{\otimes} N_+$ dans le produit $(M \oplus N)_+$.

Remarques.

- Soit M dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$; la composée du morphisme $M \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} M \to M \widehat{\otimes} M$ avec la somme des morphismes identité, $M \widehat{\otimes} M \to M$, munit M d'une structure de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-algèbre commutative unitaire.

- Soient X et Y deux espaces profinis. Le morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{MU}^* X \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^* Y \to \mathrm{MU}^* X \times Y$, induit par la structure de MU^*-algèbre de $\mathrm{MU}^* X$ et de $\mathrm{MU}^* Y$ lorsque X et Y sont sans p-torsion, est la somme dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ des morphismes $\mathrm{MU}^* X \to \mathrm{MU}^* X \times Y$ et $\mathrm{MU}^* Y \to$

$\mathrm{MU}^*X\times Y$ induits par les projections $X\times Y\to X$ et $X\times Y\to Y$. Il induit, lorsque X et Y sont pointés, un morphisme $\widetilde{\mathrm{MU}}^*X\widehat{\otimes}\widetilde{\mathrm{MU}}^*Y\to\widetilde{\mathrm{MU}}^*X\wedge Y$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}$ qui est un isomorphisme si X et Y sont sans p-torsion.

Comparaison avec les algèbres instables pour la cohomologie modulo p

Notons $\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués et H^*X la cohomologie modulo p continue d'un espace profini X. Soit E un élément de $\mathcal{E}$ de dimension totale finie ; il existe un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel fini simplicial $\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ fonctoriel en E et un morphisme naturel $E\to\mathrm{H}^*\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ induisant pour tout espace profini X une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X,\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E,\mathrm{H}^*X)$. Si E est quelconque, le système $(\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E_\alpha))$ indexé par les sous-espaces vectoriels gradués de dimension totale finie de E est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial dont la limite dans $\widehat{\mathcal{S}}$ représente le foncteur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}\to\mathcal{E}\mathrm{ns}$, $X\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E,\mathrm{H}^*X)$; on note encore $\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ cette limite.

L'adjonction munit le foncteur $\mathrm{G}_{\mathrm{H}}:E\mapsto\mathrm{H}^*\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(E)$ d'une structure de monade sur $\mathcal{E}$. Une G_{H}-algèbre est exactement une algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod modulo p. On note $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ la catégorie des G_{H}-algèbres de $\mathcal{E}$ qu'on appelle aussi $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbres instables.

Soit X un espace profini ; la structure classique d'algèbre instable sur la cohomologie modulo p continue de X coïncide avec la structure de G_{H}-algèbre, où $\mathrm{G}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}^*X)\to\mathrm{H}^*X$ est le morphisme induit par l'unité $X\to\mathrm{K}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}^*X)$ (cf [La2]).

Le produit tensoriel dans $\mathcal{E}$ de deux algèbres instables est naturellement muni d'une structure d'algèbre instable qui en fait la somme dans $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ et qui est telle que pour toute paire d'espaces profinis X,Y l'isomorphisme de Künneth $\mathrm{H}^*X\otimes\mathrm{H}^*Y\to\mathrm{H}^*X\times Y$ est un isomorphisme dans $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$.

Pour tout ensemble gradué S, l'isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués $\mathrm{G}(S)/\mathrm{f}^1\to\mathrm{H}^*\mathrm{K}(S)$, induit par le morphisme de spectres $\mathrm{MU}\to\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$, fait de $\mathrm{G}(S)/\mathrm{f}^1$ une $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable fonctoriellement en $\mathrm{G}(S)\in\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Soit maintenant M une MU-algèbre instable quelconque ; le quotient M/f^1 est canoniquement le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ du 1-complexe $\mathrm{G}^2(M)/\mathrm{f}^1\leftrightarrows\mathrm{G}(M)/\mathrm{f}^1$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ donc hérite d'une structure de $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable fonctoriellement en $M\in\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

Remarques.

- L'algèbre instable $\widehat{\mathrm{MU}}^*/\mathrm{f}^1=\mathbb{Z}/p=\mathrm{G}_{\mathrm{H}}(\emptyset)$ est un objet initial dans $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$. Pour toute MU-algèbre instable M, le morphisme $\mathbb{Z}/p\to M/\mathrm{f}^1$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ est induit par le morphisme $\widehat{\mathrm{MU}}^*\to M$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

– Soient M et N deux MU-algèbres instables ; l'isomorphisme canonique $(M\widehat{\otimes}N)/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1 \otimes N/\mathrm{f}^1$ dans $\mathcal{E}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{K}_\mathrm{H}$ (on le vérifie d'abord pour M et N des G-algèbres libres).

– Soit X un espace profini ; le morphisme $(\mathrm{MU}^*X)/\mathrm{f}^1 \to \mathrm{H}^*X$ induit par le morphisme de spectres $\mathrm{MU} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}/p$ est un morphisme de $\mathcal{K}_\mathrm{H}$.

LEMME 1.3.4. *Le foncteur* $\mathcal{K}_\mathrm{MU} \to \mathcal{K}_\mathrm{H}$, $M \mapsto M/\mathrm{f}^1$ *commute aux colimites.*

Démonstration. Ce foncteur commute aux sommes finies et aux coégalisateurs de 1-complexes donc à toutes les colimites finies (observer que le coégalisateur d'une double-flèche $f, g : M \rightrightarrows N$ s'identifie au coégalisateur du 1-complexe $f\widehat{\otimes}\mathrm{Id}, g\widehat{\otimes}\mathrm{Id}, N \to M\widehat{\otimes}N : M\widehat{\otimes}N \leftrightarrows N$). Il suffit donc pour conclure de montrer qu'il commute aux colimites filtrantes.

Soit (M_α) un diagramme filtrant de $\mathcal{K}_\mathrm{MU}$; la colimite dans $\mathcal{K}_\mathrm{MU}$ du diagramme est le coégalisateur du 1-complexe $\mathrm{colim}_\alpha \mathrm{G}^2(M_\alpha) \leftrightarrows \mathrm{colim}_\alpha$ $\mathrm{G}(M_\alpha)$. On est donc ramené à montrer que le morphisme d'algèbres instables $\mathrm{colim}_\alpha(\mathrm{G}(S_\alpha)/\mathrm{f}^1) \to (\mathrm{colim}_\alpha \mathrm{G}(S_\alpha))/\mathrm{f}^1$ est un isomorphisme pour tout diagramme filtrant (S_α) d'ensembles gradués.

Par adjonction l'espace profini $\mathrm{K}(\mathrm{colim}_\alpha S_\alpha)$ est la limite filtrante des espaces profinis $\mathrm{K}(S_\alpha)$ de sorte que sa cohomologie modulo p^n continue est, comme groupe abélien gradué, la colimite filtrante des cohomologie modulo p^n continue des espaces profinis $\mathrm{K}(S_\alpha)$. On en déduit que l'espace profini $\mathrm{K}(colim_\alpha S_\alpha)$ est sans p-torsion et que sa cohomologie modulo p continue est la colimite filtrante dans $\mathcal{K}_\mathrm{H}$ des cohomologies modulo p continue des $\mathrm{K}(S_\alpha)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque. La démonstration montre au passage que le foncteur $\mathcal{K}_\mathrm{MU} \to \mathcal{M}$, $M \mapsto M/\mathrm{f}^1$ commute aux colimites filtrantes.

PROPOSITION 1.3.5. *Pour toute* MU-*algèbre instable M l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_\mathrm{MU}}(M, \widehat{\mathrm{MU}}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_\mathrm{H}}(M/\mathrm{f}^1, \mathbb{Z}/p)$$

est une bijection.

Démonstration. On se ramène au cas où M est la G-algèbre libre sur un ensemble gradué S. Les deux ensembles sont alors canoniquement en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{pt}, \mathrm{K}(S))$. □

Remarque. Les deux ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_\mathrm{MU}}(M, \widehat{\mathrm{MU}}^*)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_\mathrm{H}}(M/\mathrm{f}^1, \mathbb{Z}/p)$ ont une structure profinie naturelle et la bijection de la proposition est un homéomorphisme.

COROLLAIRE 1.3.6. *Soit M une* MU-*algèbre instable ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La* MU-*algèbre instable M est non nulle.*

(ii) *La* $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-*algèbre instable M/f^1 est non nulle.*

Si elles sont satisfaites le morphisme $\widehat{\mathrm{MU}}^* \to M$ admet un retract dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

Démonstration. Le corollaire est conséquence de la proposition et du fait qu'une $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable N est nulle si et seulement si l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K_H}}(N, \mathbb{Z}/p)$ est vide (voir par exemple [LA1, 1.7 et 1.8]), une fois observé que la condition $M/\mathrm{f}^1 = 0$ implique la condition $M = 0$. Pour ceci on utilise une présentation $M_1 \to M_0 \to M$ de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente à M dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Si M/f^1 est nul alors l'application $M_1/\mathrm{f}^1 \to M_0/\mathrm{f}^1$ est surjective, ce qui implique que l'application $M_1 \to M_0$ est surjective par la proposition 1.2.1.3. $\square$

COROLLAIRE 1.3.7. *Soit X un espace profini fibrant sans p-torsion, alors l'application naturelle*

$$\pi_0 X \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{pt}, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}^* X, \widehat{\mathrm{MU}}^*)$$

est une bijection (homéomorphisme d'ensembles profinis).

Démonstration. Le corollaire vient de la proposition 1.3.5, de l'isomorphisme $\mathrm{MU}^* X/\mathrm{f}^1 \to \mathrm{H}^* X$ et de l'homéomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{pt}, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{H}^* X, \mathbb{Z}/p)$. $\square$

1.4. Résolutions

Nous introduisons cette section par quelques considérations générales sur les résolutions.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant un objet terminal 0. Un objet en groupe abélien de $\mathcal{C}$ est la donnée d'un objet A et d'une structure de groupe abélien sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ naturelle en $C \in \mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ leur catégorie. La limite dans $\mathcal{C}$ d'un diagramme de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, lorsqu'elle existe, est canoniquement munie d'une structure d'objet en groupe abélien qui en fait la limite dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ du diagramme ; en particulier les produits finis dans $\mathcal{C}$ d'éléments de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, lorsqu'ils existent, sont naturellement leurs produits dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ et on vérifie qu'ils sont également leurs sommes dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. Observons que lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est additive la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ s'identifie à $\mathcal{C}$.

On note $\mathcal{C}_0$ la catégorie des morphismes $0 \to C$, $C \in \mathcal{C}$; l'objet 0 muni de l'unique morphisme $0 \to 0$ en est l'objet initial et terminal. Un cocomplexe de $\mathcal{C}_0$ est une suite d'objets $(C^n)_{n\geq 0}$ et une suite de morphismes $C^n \to C^{n+1}$ telle que la composée $C^n \to C^{n+1} \to C^{n+2}$ est le morphisme trivial. Un morphisme entre cocomplexes $C^* \to C'^*$ est une suite de morphismes $C^n \to C'^n$, $n \geq 0$, telle que les composées $C^n \to C'^n \to C'^{n+1}$ et $C^n \to C^{n+1} \to C'^{n+1}$ sont égales. Un cocomplexe C^* est dit coaugmenté s'il est muni d'un morphisme du cocomplexe égale à un objet C en degré 0 et 0 ailleurs dans lui même.

Deux morphismes f, g entre cocomplexes C^* et C'^* de $\mathcal{C}_0$ sont dits homotopes si pour tout objet en groupe abélien A de $\mathcal{C}$, les morphismes induits entre complexes de groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(C'^*, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(C^*, A)$ sont homotopes. Lorsque les objets C'^n, $n \geq 0$, sont des objets en groupes abéliens, cela équivaut à l'existence de morphismes $s^n : C^n \to C'^{n-1}$ (en convenant $C^{-1} = 0$) tels qu'on ait $g_n - f_n = \mathrm{d}^{n-1}s^n + s^{n+1}\mathrm{d}^n$ pour la structure d'objet en groupe abélien de C'^n, où d^n désigne le morphisme de bord $C^n \to C^{n+1}$ et $C'^n \to C'^{n+1}$ respectivement.

Soit $\mathcal{L}$ une sous-classe d'objets de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. Un cocomplexe coaugmenté $C \to C^*$ de $\mathcal{C}_0$ est dit acyclique relativement à $\mathcal{L}$ si pour tout objet L de $\mathcal{L}$ le complexe augmenté induit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(C^*, L) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(C, L)$ est acyclique.

Proposition 1.4.1. *Soient $C \to C^*$ un cocomplexe coaugmenté acyclique relativement à $\mathcal{L}$ et $C' \to A^*$ un cocomplexe coaugmenté tel que les objets A^n sont dans $\mathcal{L}$ pour tout $n \geq 0$; alors tout morphisme $C \to C'$ dans $\mathcal{C}_0$ se relève en un morphisme $C^* \to A^*$. De plus deux tels relevés sont homotopes.*

Supposons maintenant la catégorie $\mathcal{C}$ abélienne et qu'elle possède suffisamment d'injectifs. On dispose de l'équivalence de Dold-Kan entre objets cosimpliciaux et cocomplexes de $\mathcal{C}$: A un objet cosimplicial $A^\bullet$ de $\mathcal{C}$ on associe le cocomplexe $\mathrm{N}^*(A^\bullet)$ défini par $\mathrm{N}^0(A^\bullet) = A^0$, $\mathrm{N}^{n+1}(A^\bullet)$ est la colimite du diagramme formé des cofaces d^i, $i \geq 1$, et du morphisme nul et $\mathrm{N}^n(A^\bullet) \to \mathrm{N}^{n+1}(A^\bullet)$ est le morphisme induit par la coface d^0. Le foncteur $A^\bullet \mapsto \mathrm{N}^*(A^\bullet)$ est une équivalence de catégorie ; l'homologie du cocomplexe $\mathrm{N}^*(A^\bullet)$ s'identifie à l'homotopie de l'objet cosimplicial $A^\bullet$; $\mathrm{N}^*(A^\bullet)$ est un retract du cocomplexe A^* formé des objets A^n et de la somme alternée des cofaces et la projection $A^* \to \mathrm{N}^*(A^\bullet)$ est une équivalence d'homotopie.

Prenons pour $\mathcal{L}$ la classe des objets injectifs de $\mathcal{C}$. Un cocomplexe coaugmenté $A \to A^*$ est acyclique relativement à $\mathcal{L}$ si et seulement si le morphisme du cocomplexe concentré en degré 0 et égal à A dans A^* induit un isomorphisme en homologie. Tout objet de $\mathcal{C}$ admet une résolution par des objets de $\mathcal{L}$ unique à homotopie près.

On obtient des énoncés duaux concernant les objets en cogroupe abélien et les complexes augmentés en remplaçant la catégorie $\mathcal{C}$ par la catégorie opposée.

Soient enfin T une monade sur $\mathcal{E}$ns-gr, M une T-algèbre et $M_\bullet \to M$ un morphisme d'une T-algèbre simpliciale $M_\bullet$ dans la T-algèbre simpliciale constante égale à M. Nous dirons que la T-algèbre simpliciale augmentée $M_\bullet \to M$ est une résolution simpliciale de M si le morphisme d'ensembles gradués simpliciaux sous-jacent de $M_\bullet$ dans M est une équivalence d'homotopie. Lorsque T et la transformation naturelle $T \circ T \to T$ sont à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens gradués, la T-algèbre simpliciale augmentée $M_\bullet \to M$ est une résolution si et seulement si le complexe augmenté de groupes abéliens gradués induit $M_* \to M$ est acyclique.

1.4.1. Résolutions libres dans $\widehat{\mathcal{M}}$

Soit M_* un complexe (nul en degré négatif) de $\widehat{\mathcal{M}}$; son homologie est un objet gradué de $\widehat{\mathcal{M}}$. Il est dit augmenté s'il est muni d'un morphisme de M_* dans le complexe concentré en degré 0 et égal à M pour une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M. Un complexe augmenté $M_* \to M$ est dit acyclique si le morphisme de complexe $M_* \to M$ induit un isomorphisme en homologie.

La proposition suivante est un cas particulier de la proposition 1.4.1 et généralise la proposition 1.2.3.3 :

Proposition 1.4.1.1. *Soient $M_* \to M$ et $N_* \to N$ deux complexes augmentés de $\widehat{\mathcal{M}}$. On suppose que les objets M_n sont dans $\widehat{\mathcal{L}}$ pour tout n et que le complexe augmenté $N_* \to N$ est acyclique ; alors tout morphisme de M dans N se relève en un morphisme de M_* dans N_* unique à homotopie près.*

On appelle résolution libre d'une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M la donnée d'un complexe M_* de $\widehat{\mathcal{L}}$ et d'une augmentation $M_0 \to M$ tels que le complexe augmenté $M_* \to M$ soit acyclique. On appelle longueur d'une telle résolution la borne inférieure (éventuellement infinie) des entiers n tels que M_k est l'objet nul pour tout $k > n$.

Toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M admet une résolution libre canonique : la structure de monade de $\widehat{\mathrm{L}}$ permet d'associer à M l'objet simplicial $\widehat{\mathrm{L}}_\bullet(M)$ de $\widehat{\mathcal{L}}$ et le morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}_\bullet(M)$ dans la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre simpliciale constante égale à M est une équivalence d'homotopie entre les ensembles gradués simpliciaux sous-jacents de sorte que le complexe augmenté associé $\widehat{\mathrm{L}}_*(M) \to M$ est acyclique. On peut aussi observer que le complexe normalisé de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre simpliciale $\widehat{\mathrm{L}}_\bullet(M)$ est une résolution de M et un complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$ car retract de $\widehat{\mathrm{L}}_*(M)$. La proposition qui précède montre que deux résolutions libres d'une même $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sont équivalentes homotopiquement.

Le lemme suivant est une généralisation du point (b) de la proposition 1.2.1.3 :

Lemme 1.4.1.2. *Soit $M' \to M \to M''$ une suite de morphismes de $\widehat{\mathcal{L}}$ telle que la suite induite $M'/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1 \to M''/\mathrm{f}^1$ est exacte dans $\mathcal{E}$; alors la suite $M' \to M \to M''$ est exacte dans $\widehat{\mathcal{M}}$ et le noyau du morphisme $M' \to M$ comme le conoyau du morphisme $M \to M''$ sont dans $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que le conoyau du morphisme $M' \to M$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Notons le N ; il suffit par le lemme 1.2.1.2 de vérifier que N est complet et que l'application $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes N/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^{n+1}$ est injective pour tout n. Le second point vient de ce que la composée $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes N/\mathrm{f}^1 \to \mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes M''/\mathrm{f}^1 \to M''/\mathrm{f}^{n+1}$ est injective (par l'hypothèse et le fait que M'' est dans $\widehat{\mathcal{L}}$) et qu'elle coïncide avec la composée $\mathrm{f}^n\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^{n+1}\mathrm{MU}^* \otimes N/\mathrm{f}^1 \to N/\mathrm{f}^{n+1} \to M''/\mathrm{f}^{n+1}$. Notons N' le complété de N ; alors N' est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et la suite $M' \to M \to N'$ induit une suite exacte $M'/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1 \to N'/\mathrm{f}^1 \to 0$ d'où on déduit que l'application $M \to N'$ est surjective et que M' se surjecte sur le noyau de $M \to M'$ par la proposition 1.2.1.3, donc N' égale N.

Le morphisme $N \to M''$ induit une injection $N/\mathrm{f}^1 \to M''/\mathrm{f}^1$ donc est injectif et son conoyau est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ par la proposition 1.2.1.3. De même l'image du morphisme $M' \to M$, qui s'identifie au noyau de la surjection $M \to N$, est dans $\widehat{\mathcal{L}}$, donc également le noyau du morphisme $M' \to M$ ce qui achève la démonstration. ☐

Remarque. Voici une reformulation du lemme : Soit $M' \to M$ un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres. On suppose que M est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et que l'application $M'/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1$ est injective ; alors M' est un retract de M (en particulier M' et le conoyau de $M' \to M$ sont dans $\widehat{\mathcal{L}}$).

Proposition 1.4.1.3. *Soit M_* un complexe de $\widehat{\mathcal{L}}$; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'homologie du complexe* M_*/f^1 *est concentrée en degré* 0.

(ii) *L'homologie du complexe* M_* *est concentrée en degré* 0 *et le conoyau du morphisme* $M_1 \to M_0$ *est dans* $\widehat{\mathcal{L}}$.

Démonstration. L'implication de (ii) par (i) est une conséquence immédiate du lemme 1.4.1.2. Supposons maintenant la condition (ii) satisfaite. Soit K le noyau du morphisme $M_0 \to M$; alors K est un retract de M_0 par le point (a) de la proposition 1.2.1.3 donc est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et la suite $0 \to K/\mathrm{f}^1 \to M_0/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1 \to 0$ est exacte. Le complexe $M_{*+1} = (\cdots \to M_1 \to 0)$ vérifie encore la condition (ii) de sorte qu'on obtient inductivement la condition (i). □

Voici un exemple d'application de la proposition :

Lemme 1.4.1.4. *Soit* (L_α) *un diagramme filtrant d'objets de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *; alors la* $\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbre colimite des* L_α *est dans* $\widehat{\mathcal{L}}$

Démonstration. La $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre colimite des L_α est le π_0 de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre simpliciale $\mathrm{colim}_\alpha \widehat{\mathrm{L}}_\bullet(L_\alpha)$ induite par la résolution libre canonique des L_α. Pour chaque entier $n \geq 1$ la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{colim}_\alpha \widehat{\mathrm{L}}^n(L_\alpha)$ est par adjonction la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre libre sur la colimite des ensembles gradués sous-jacents aux $\widehat{\mathrm{L}}^{n-1}(L_\alpha)$. Il suffit donc de montrer que l'homologie du complexe $(\mathrm{colim}_\alpha \widehat{\mathrm{L}}_*(L_\alpha))/\mathrm{f}^1$ est concentrée en degré 0, or cela vient de l'isomorphisme $\mathrm{colim}_\alpha (\widehat{\mathrm{L}}^n(L_\alpha)/\mathrm{f}^1) \to (\mathrm{colim}_\alpha \widehat{\mathrm{L}}_*(L_\alpha))/\mathrm{f}^1$ et de l'exactitude des colimites filtrantes dans $\mathcal{E}$. □

Le lemme 1.4.1.2 implique également une version duale mais moins forte de la proposition 1.4.1.3 :

Proposition 1.4.1.5. *Soit* M^* *un cocomplexe de* $\widehat{\mathcal{L}}$ *tel que l'homologie du cocomplexe* M^*/f^1 *est concentrée en degré* 0 *; alors l'homologie du cocomplexe* M^* *est concentrée en degré* 0 *et le noyau du morphisme* $M^0 \to M^1$ *est dans* $\widehat{\mathcal{L}}$.

Soient M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres ; on définit la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre graduée $\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ comme l'homologie du complexe $\widehat{\mathrm{L}}_*(M)\widehat{\otimes}N$. L'invariance par homotopie implique que pour toute résolution libre $M_* \to M$ de M il existe un isomorphisme canonique entre l'objet gradué $\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ et l'homologie du complexe $M_*\widehat{\otimes}N$.

Observons que $\mathrm{Tor}_0^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ s'identifie au produit tensoriel des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres M et N.

Proposition 1.4.1.6. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et n un entier positif. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^1)$ est nulle.*

(ii) *Il existe une résolution libre de M de longueur inférieure ou égale à n.*

(iii) *Pour toute résolution libre $M_* \to M$ de M, le conoyau du morphisme $M_{n+1} \to M_n$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Si elles sont vérifiées, les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ sont nulles pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre N et tout entier $k > n$.

Démonstration. La condition (i) implique (iii) par le lemme 1.4.1.2. La condition (iii) implique (ii) : la suite $\cdots \to 0 \to \mathrm{Coker}(M_{n+1} \to M_n) \to \cdots \to M$ est une résolution libre de M. Enfin (ii) implique clairement (i) et la dernière assertion de la proposition. $\square$

Exemple. Nous verrons plus loin que la MU-cohomologie continue d'un espace profini de dimension finie admet une résolution libre de longueur finie.

Exactitude du produit tensoriel et torsion

Soient $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres et $M'_* \to M'$, $M''_* \to M''$ des résolutions libres de M' et M'' respectivement.

Lemme 1.4.1.7. *Il existe une suite de morphismes $M'_{n+1} \oplus M''_{n+1} \to M'_n \oplus M''_n$, $n \geq 0$, et $M'_0 \oplus M''_0 \to M$ telle que les injections $M'_n \to M'_n \oplus M''_n$ et les projections $M'_n \oplus M''_n \to M''_n$ induisent une suite exacte courte de complexes augmentés $0 \to (M'_* \to M') \to (M'_* \oplus M''_* \to M) \to (M''_* \to M'') \to 0$, en particulier telle que le complexe augmenté $M'_* \oplus M''_* \to M$ est une résolution libre de M.*

Démonstration. Comme M''_0 est projectif et $M \to M''$ est surjectif, le morphisme $M''_0 \to M''$ se relève en un morphisme $M''_0 \to M$ et on vérifie que le morphisme obtenu $M'_0 \oplus M''_0 \to M$ est surjectif. Soit n un entier positif et supposons construit une suite exacte $M'_n \oplus M''_n \to \cdots \to M'_0 \oplus M''_0 \to$

$M \to 0$ compatible avec les suites exactes $M'_n \to \cdots \to M' \to 0$ et $M''_n \to \cdots \to M'' \to 0$. Notons K et K'' les noyaux des morphismes $M'_n \oplus M''_n \to M'_{n-1} \oplus M''_{n-1}$ et $M''_n \to M''_{n-1}$ respectivement si n est strictement positif, des morphismes $M'_0 \oplus M''_0 \to M$ et $M''_0 \to M''$ sinon. Le morphisme $K \to K''$, induit par la projection $M'_n \oplus M''_n \to M''_n$ est surjectif d'où on déduit l'existence d'un relèvement de $M''_{n+1} \to K''$ à K. On vérifie à nouveau que le morphisme obtenu $M'_{n+1} \oplus M''_{n+1} \to K$ est surjectif. On construit ainsi par récurrence sur n une suite de morphismes $M'_{n+1} \oplus M''_{n+1} \to M'_n \oplus M''_n$ compatibles avec les morphismes $M'_{n+1} \to M\tilde{N}_n$ et $M''_{n+1} \to M''_n$. Le fait qu'elle forme une résolution de M vient de la suite exacte longue en homologie associée à une suite exacte courte de complexes. $\square$

Soit maintenant N une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre. Pour chaque entier n, la suite $0 \to M'_n \widehat{\otimes} N \to (M'_n \oplus M''_n) \widehat{\otimes} N \to M''_n \widehat{\otimes} N \to 0$ est une suite exacte car scindée dans $\widehat{\mathcal{M}}$. La suite exacte de complexes $0 \to M'_* \widehat{\otimes} N \to (M'_* \oplus M''_*) \widehat{\otimes} N \to M''_* \widehat{\otimes} N \to 0$ induit une suite exacte longue en homologie qui s'écrit

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M'',N) \to M' \widehat{\otimes} N \to M \widehat{\otimes} N \to M'' \widehat{\otimes} N \to 0 \ .$$

En particulier le foncteur $M \mapsto M \widehat{\otimes} N$ est toujours exact à droite et est exact à gauche si la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ est nulle quelque soit M. Le lemme suivant, qui s'obtient également par la suite exacte longue des $\mathrm{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}(-,N)$, donne la réciproque :

Lemme 1.4.1.8. *Soient M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre, $M_0 \to M$ le début d'une résolution libre de M et K le noyau du morphisme $M_0 \to M$; alors pour tout entier n strictement positif l'objet $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ s'identifie à $\mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(K,N)$ et $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ s'identifie au noyau du morphisme $K \widehat{\otimes} N \to M_0 \widehat{\otimes} N$.*

Exemple. Soient M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$. La $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(L,M)$ est nulle par définition ; il faut par contre prendre garde au fait que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,L)$ n'est pas nulle en général, autrement dit le produit tensoriel par L n'est pas en général un foncteur exact sur $\widehat{\mathcal{M}}$. Nous introduirons plus loin des conditions de finitude sur M et L garantissant l'annulation de l'objet $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,L)$.

Soit symétriquement M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre, $M_* \to M$ une résolution libre de M et $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte dans $\widehat{\mathcal{M}}$. Cette dernière induit une suite exacte de complexes $M_* \widehat{\otimes} N' \to M_* \widehat{\otimes} N \to M_* \widehat{\otimes} N'' \to 0$.

PROPOSITION 1.4.1.9. *Soit n un entier positif et supposons que les objets $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(N'', M_k)$ sont nuls pour tout $0 \leq k \leq n$; alors la suite exacte de complexes $M_* \widehat{\otimes} N' \to M_* \widehat{\otimes} N \to M_* \widehat{\otimes} N'' \to 0$ induit une suite exacte*

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N) \to \mathrm{Tor}_{n+1}^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N'') \to \mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N') \to \cdots$$
$$\to M \widehat{\otimes} N \to M \widehat{\otimes} N'' \to 0.$$

Démonstration. Notons K_n l'image du morphisme $M_{n+1} \to M_n$ et K le noyau du morphisme $K_n \widehat{\otimes} N \to K_n \widehat{\otimes} N''$. Notons enfin A'_*, A_* et A''_* les complexes tronqués $\cdots \to 0 \to K \to M_n \widehat{\otimes} N' \to \cdots \to M_0 \widehat{\otimes} N'$, $\cdots 0 \to K_n \widehat{\otimes} N \to M_n \widehat{\otimes} N \to \cdots \to M_0 \widehat{\otimes} N$ et $\cdots 0 \to K_n \widehat{\otimes} N'' \to M_n \widehat{\otimes} N'' \to \cdots \to M_0 \widehat{\otimes} N''$ respectivement. L'hypothèse portant sur les objets $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(N'', M_k)$ garantit que la suite de complexes $0 \to A'_* \to A_* \to A''_* \to 0$ est exacte ; on obtient une suite exacte longue en homologie. Les k-ièmes objets d'homologie des complexes A_* et A''_* s'identifient aux objets $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N)$ et $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N'')$ respectivement pour $0 \leq k \leq n+1$ (on utilise le lemme ci-dessus). De même le k-ième objet d'homologie du complexe A'_* s'identifie à l'objet $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N')$ pour $0 \leq k \leq n$ car le morphisme $K_n \widehat{\otimes} N' \to M_n \widehat{\otimes} N'$ se factorise par la surjection $K_n \widehat{\otimes} N' \to K$. On obtient la suite exacte annoncée. □

COROLLAIRE 1.4.1.10. *Soient M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres et soient $M_0 \to M$ et $N_0 \to N$ les débuts de résolutions libres de M et N respectivement. On suppose que les objets $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N_0)$ et $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(N, M_0)$ sont nuls ; alors les objets $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N)$ et $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(N, M)$ sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. Notons K le noyau du morphisme $N_0 \to N$ et soit $M_* \to M$ une résolution libre de M complétant le morphisme $M_0 \to M$. On dispose par la proposition d'une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N_0) \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N) \to M \widehat{\otimes} K \to M \widehat{\otimes} N_0 \to M \widehat{\otimes} N \to 0$$

d'où on déduit que l'objet $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N)$ s'identifie au noyau du morphisme $M \widehat{\otimes} K \to M \widehat{\otimes} N_0$ donc à l'objet $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(N, M)$ par le lemme 1.4.1.8. □

Comparaison avec les modules $\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathrm{MU}}^*}(M, N)$

Soient M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres, $M_* \to M$ une résolution libre de M et $L_* \to M$ une résolution de M par des $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules libres. L'identité de M se relève en un morphisme entre complexes de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules de L_* dans M_*, unique à homotopie près. La composée $L_*\otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*}N \to M_*\otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*}N \to M_*\widehat{\otimes}N$ induit un morphisme canonique $\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathrm{MU}}^*}(M,N) \to \mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules gradués.

PROPOSITION 1.4.1.11. *Soient M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres, $M_* \to M$ une résolution libre de M et $N_1 \to N_0 \to N$ une présentation de N dans $\widehat{\mathcal{L}}$. On suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) *Les espaces vectoriels gradués $M_n/\mathrm{f}^1, n \in \mathbb{N}$ et $N_n/\mathrm{f}^1, n \in \{0,1\}$ sont nuls en degré assez grand et l'une des famille est formée d'espaces vectoriels gradués de dimension finie en chaque degré.*

(2) *L'une des familles $M_n/\mathrm{f}^1, n \in \mathbb{N}$ ou $N_n/\mathrm{f}^1, n \in \{0,1\}$ est formée d'espaces vectoriels gradués de dimension totale finie.*

Alors pour tout entier n le morphisme $\mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathrm{MU}}^*}(M,N) \to \mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ est un isomorphisme de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules.

Démonstration. Sous l'une des conditions (1) ou (2) le $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module gradué sous-jacent à l'objet $\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ s'identifie à l'homologie du complexe $M_* \otimes_{\widehat{\mathrm{MU}}^*} N$. Il suffit donc de montrer que les $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules M_n sont plats pour tout n. Or cela vient de ce que M_n est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et est nul en degré assez grand, donc est isomorphe au produit tensoriel au dessus de $\mathbb{Z}_p$ de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$ et d'un $\mathbb{Z}_p$-module sans torsion (de façon non canonique). $\square$

La proposition suivante permet d'identifier les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres qui admettent une résolution libre vérifiant la condition (1) ci-dessus.

PROPOSITION 1.4.1.12. *Soit M un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module nul en degré assez grand qu'on munit de la filtration par les coefficients ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module M admet un ensemble gradué de générateurs fini en chaque degré.*

(ii) *Le $\mathbb{Z}_p$-module gradué sous-jacent à M est de type fini en chaque degré.*

(iii) *M est une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et M/f^1 est fini en chaque degré.*

Si elles sont vérifiées, M est complet pour la filtration par les coefficients.

Démonstration. Supposons la condition (iii) satisfaite. Soit S une base du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué M/f^1 qu'on relève en une famille d'éléments de M ; l'application $S \to M$ induit un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to M$ dont on note Q le conoyau. Comme l'espace vectoriel gradué Q/f^1 est le conoyau du morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S)/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1$, il est nul. On en déduit que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre Q est nulle en utilisant le début d'une résolution libre de Q et la proposition 1.2.1.3. Autrement dit l'application $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to M$ est surjective, ce qui implique la condition (i). La condition (i) implique la condition (ii), laquelle implique que M est fini en chaque degré modulo f^1 et qu'il est complet pour la filtration p-adique donc est dans $\widehat{\mathcal{M}}^0$ par la proposition 1.2.3.4. Observons également que la condition (i) se déduit facilement de (ii) et qu'elle implique que M est complet pour la filtration par les coefficients : on le vérifie d'abord lorsque M est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module libre et on l'obtient dans le cas général par l'absence de terme $\lim^1$. $\square$

Corollaire 1.4.1.13. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre nulle en degré assez grand et finie en chaque degré modulo* f^1 *; alors M admet une résolution par des objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ vérifiant les mêmes propriétés.*

Démonstration. On construit inductivement une résolution libre $M_* \to M$ de M avec les propriétés requises. Le fait que M vérifie la condition (i) de la proposition montre l'existence de M_0. Le fait que M_0 et M vérifient la condition (ii) de la proposition implique que le noyau du morphisme $M_0 \to M$ vérifie la même condition donc vérifie les hypothèses faites sur M, ce qui permet de conclure. $\square$

Modules de présentation en degré borné et foncteur Tor

Nous dirons qu'une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M est de présentation en degré borné si M est le conoyau d'un morphisme $M_1 \to M_0$ de $\widehat{\mathcal{L}}$ avec M_1/f^1 et M_0/f^1 concentrés en un nombre fini de degrés. La MU-cohomologie continue d'un espace profini de dimension finie en est un exemple. Une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de présentation en degré borné s'identifie toujours à la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre obtenue par l'extension des scalaires d'une sous-algèbre polynomiale de type fini de MU^* à MU^* (nous donnons ci-dessous un sens précis à cette affirmation), ce qui implique qu'elle admet une résolution libre de longueur finie.

Soit n un entier ; on note Λ_0 l'anneau des entiers p-adiques et Λ_n le sous-anneau de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$ engendré par $x_1, \ldots, x_n$. L'anneau Λ_n est un retract de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$ et une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre quotient.

Pour tout ensemble gradué S, on note $\widehat{\mathrm{L}}_n(S)$ le complété pour la filtration par les coefficients du MU^*-module sous-jacent au Λ_n-module libre de base S. Observons que la filtration limite de $\widehat{\mathrm{L}}_n(S)$ coïncide avec la filtration par les coefficients.

Le foncteur $\mathcal{E}$ns-gr $\to \mathcal{E}$ns-gr, $S \mapsto \widehat{\mathrm{L}}_n(S)$ possède, comme le foncteur $\widehat{\mathrm{L}}$, une structure de monade ; on note $\widehat{\mathcal{M}_n}$ la catégorie des $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr. Les homomorphismes $\Lambda_n \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$ et $\widehat{\mathrm{MU}}^* \to \Lambda_n$ induisent des morphismes entre monades $\widehat{\mathrm{L}}_n \to \widehat{\mathrm{L}}$ et $\widehat{\mathrm{L}} \to \widehat{\mathrm{L}_n}$ dont la composée est l'identité. On en déduit des foncteurs "oubli" $\mathcal{O}_n : \widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}_n$ et $\mathcal{O} : \widehat{\mathcal{M}}_n \to \widehat{\mathcal{M}}$ dont la composée $\mathcal{O}_n\mathcal{O}$ est l'identité de $\widehat{\mathcal{M}}_n$

Comme $\widehat{\mathcal{M}}$, la catégorie $\widehat{\mathcal{M}}_n$ est abélienne et les foncteurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_n$ sont exacts ; cependant $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_n$ ne commutent pas aux sommes infinies. On définit un produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{M}}_n$ comme dans $\widehat{\mathcal{M}}$ en posant, pour S et S' deux ensembles gradués, $\widehat{\mathrm{L}}_n(S)\widehat{\otimes}_n\widehat{\mathrm{L}}_n(S') = \lim_k(\widehat{\mathrm{L}}_n(S_k \times S'_k)$, où S_k et S'_k désignent les sous-ensembles gradués de S et S' formés des éléments de degré inférieur ou égal à k, et en étendant le produit tensoriel à $\widehat{\mathcal{M}}_n$ entier par exactitude à droite.

On note $\widehat{\mathcal{M}}^0_n$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{M}}_n$ formée des $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres nulles en degré assez grand. Pour M et N dans $\widehat{\mathcal{M}}^0$ la structure de $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module sur M et N induit un diagramme coégalisateur

$$\mathcal{O}_n M\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^*\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n N \leftrightarrows \mathcal{O}_n M\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n N \to \mathcal{O}_n(M\widehat{\otimes}N)$$

(on le vérifie d'abord pour M et N libres). On vérifie en particulier que pour toute paire M, N de $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres nulles en degré assez grand le morphisme $\mathcal{O}(M\widehat{\otimes}_n N) \to \mathcal{O}M\widehat{\otimes}\mathcal{O}N$ est un isomorphisme.

Proposition - Définition 1.4.1.14.

(a) *Le foncteur oubli $\mathcal{O}_n : \widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}_n$ admet un adjoint à gauche qu'on note* M_n.

(b) *Pour toute paire d'objets M et N de $\widehat{\mathcal{M}}^0_n$ et $\widehat{\mathcal{M}}^0$ respectivement la composée $M\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n N \to \mathcal{O}_n\mathrm{M}_n(M)\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n N \to \mathcal{O}_n(\mathrm{M}_n(M)\widehat{\otimes}N)$ est un isomorphisme.*

(c) *Pour toute paire d'objets M, N de $\widehat{\mathcal{M}}^0_n$ le morphisme $\mathrm{M}_n(M)\widehat{\otimes}\mathcal{O}N \to \mathcal{O}M\widehat{\otimes}\mathcal{O}N \simeq \mathcal{O}(M\widehat{\otimes}_n N)$, induit par la counité $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_n\mathcal{O}M) \to \mathcal{O}M$, est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour tout ensemble gradué S on pose $\mathrm{M}_n(\widehat{\mathrm{L}}_n(S)) = \widehat{\mathrm{L}}(S)$; l'application $S \to \mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{L}}(S)$ induit par adjonction un morphisme

$\widehat{\mathrm{L}}_n(S) \to \mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{L}}(S)$. Tout morphisme $\widehat{\mathrm{L}}_n(S) \to \widehat{\mathrm{L}}_n(S')$ dans $\widehat{\mathcal{M}}_n$ est adjoint d'une application $S \to \widehat{\mathrm{L}}_n(S')$ donc induit par composition et adjonction un morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$. Pour tout objet M dans $\widehat{\mathcal{M}}_n$ on définit $\mathrm{M}_n(M)$ comme le coégalisateur dans $\widehat{\mathcal{M}}$ de l'image par M_n du 1-complexe $\widehat{\mathrm{L}}_n^2(M) \leftrightarrows \widehat{\mathrm{L}}_n(M)$. Le morphisme $M \to \mathcal{O}_n\mathrm{M}_n(M)$ obtenu fait du foncteur M_n l'adjoint à gauche de $\mathcal{O}_n$.

Le point (b) se vérifie facilement lorsque M et N sont libres sur des ensembles gradués (vides en degré assez grand). On en déduit le cas général par exactitude à droite du produit tensoriel et des foncteurs $\mathcal{O}_n$ et M_n.

Le point (c) est conséquence du point (b) : le morphisme induit $\mathcal{O}_n(\mathrm{M}_n(M)\widehat{\otimes}\mathcal{O}N) \to \mathcal{O}_n\mathcal{O}M\widehat{\otimes}\mathcal{O}_n\mathcal{O}N \simeq M\widehat{\otimes}_nN$ est l'isomorphisme inverse de $M\widehat{\otimes}_nN \to \mathcal{O}_n(\mathrm{M}_n(M)\widehat{\otimes}\mathcal{O}N)$. $\square$

On peut développer dans $\widehat{\mathcal{M}}_n$ la même algèbre homologique que dans $\widehat{\mathcal{M}}$. On note en particulier, pour M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres, $\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}_n}(M,N)$ l'homologie du produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{M}}_n$ de la $\widehat{\mathrm{L}}_n$-résolution libre canonique de M par N. Le premier point du lemme suivant montre que toute $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre admet une résolution libre de longueur inférieure ou égale à 1 (nous verrons plus loin que toute $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre nulle en degré assez grand admet une résolution libre de longueur inférieure ou égale à $n+1$). Le second point est une application du premier à l'exactitude du produit tensoriel par un objet de $\widehat{\mathcal{L}}_0$.

Lemme 1.4.1.15.

(a) *Soient M une $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre ; alors M est dans $\widehat{\mathcal{L}}_0$ si et seulement si M est complet pour la filtration p-adique et sans torsion comme groupe abélien.*

(b) *Soient $M \to N$ un morphisme injectif de $\widehat{\mathcal{M}}_0$ et L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}_0$; alors $M\widehat{\otimes}_0L \to N\widehat{\otimes}_0L$ est injectif.*

Démonstration. Le point (a) se déduit d'une version pour $\widehat{\mathcal{L}}_0$ du lemme 1.2.1.2 : si M est sans torsion alors la suite $0 \to p^nM/p^{n+1}M \to M/p^{n+1}M \to M/p^nM \to 0$ est exact pour tout $n \geq 0$.

Comme toute sous-$\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre d'une $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre libre est complète pour la filtration p-adique et sans torsion, toute $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre admet une résolution dans $\widehat{\mathcal{L}}_0$ de longueur 1. Soit alors M une $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre, $0 \to M_1 \to M_0 \to M$ une résolution de M dans $\widehat{\mathcal{L}}_0$ et S un ensemble gradué. Il existe un ensemble gradué S' et un isomorphisme $\widehat{\mathrm{L}}_0(S') \to M_1$ de sorte que les éléments de

degré k de $M_0\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}(S)$ s'identifient aux applications de l'ensemble $\cup_{i+j=k}S'^i$ $\times S^j$ dans $\mathbb{Z}_p$ dont la composée avec la réduction modulo p^n est pour tout entier n à support fini. Pour tout élément $s\in S$, le diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} M_1\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(S) & \rightarrow & M_0\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(\{s\}) & \rightarrow & M_0\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(\{s\}) \end{array}$$
montre que tout élément du noyau du morphisme $M_1\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(S)\to M_0\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(S)$ est d'image 0 dans $M_1\widehat{\otimes}_0\widehat{\mathrm{L}}_0(\{s\})$, ce qui implique que cet élément est nul. On en déduit que la $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}_0}(M,\widehat{\mathrm{L}}_0(S))$ est nulle ce qui implique le point (b). $\square$

Remarque. Soient M, N, L trois objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ et $M\to N$ un morphisme injectif ; alors l'application $M\widehat{\otimes}L\to N\widehat{\otimes}L$ est injective. On le montre par un argument analogue à celui utilisé pour démontrer le point (b) ci-dessus : pour S et S' deux ensembles gradués, les éléments de degré k du produit tensoriel $\widehat{\mathrm{L}}(S)\widehat{\otimes}\widehat{\mathrm{L}}(S')$ s'identifient aux familles $(f_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ d'applications de $S'^i\times S^j$ dans $\widehat{\mathrm{MU}}^{k-i-j}$ telles que pour tout indice (i,j) et pour tout entier $n\geq 0$ la composée de $f_{i,j}$ avec la réduction modulo f^n, $S'^i\times S^j\to(\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n)^{k-i-j}$, est à support fini.

PROPOSITION 1.4.1.16. *Soient M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et N un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ tels que M et N sont nuls en degré assez grand ; alors la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ est nulle.*

Démonstration. Soit K le noyau du morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(M)\to M$; K et $\widehat{\mathrm{L}}(M)$ sont dans $\widehat{\mathcal{M}}^0$ et il suffit pour prouver la proposition de montrer que le morphisme $K\widehat{\otimes}N\to\widehat{\mathrm{L}}(M)\widehat{\otimes}N$ est injectif. Comme N est libre, N est isomorphe à la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{M}_0(N_0)$ pour un certain objet N_0 de $\widehat{\mathcal{L}}_0$. Le point (b) de la proposition 1.4.1.14 montre que les $\widehat{\mathrm{L}}_0$-algèbres $\mathcal{O}_0(K\widehat{\otimes}N)$ et $\mathcal{O}_0(\widehat{\mathrm{L}}(M)\widehat{\otimes}N)$ sont naturellement isomorphes aux produits tensoriels $\mathcal{O}_0K\widehat{\otimes}_0N_0$ et $\mathcal{O}_0\widehat{\mathrm{L}}(M)\widehat{\otimes}_0N_0$. On conclut par l'exactitude du foncteur $\mathcal{O}_0$ et le lemme qui précède. $\square$

PROPOSITION 1.4.1.17. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre nulle en degré assez grand ; alors M et $\mathrm{M}_n(M)$ admettent une résolution respectivement dans $\widehat{\mathcal{L}}_n$ et dans $\widehat{\mathcal{L}}$ de longueur $n+1$.*

Démonstration. On construit d'abord inductivement une résolution canonique $0\to L^n_{n+1}\to\cdots\to L^n_0\to\mathbb{Z}/p$ de la $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre $\mathbb{Z}/p=\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^*/\mathrm{f}^1$, avec L^n_k dans $\widehat{\mathcal{L}}_n$ et nulle en degré assez grand pour tout $0\leq k\leq n+$

1. Pour $n = 0$, $\mathbb{Z}/p$ apparaît comme le conoyau de la multiplication par $p : \Lambda_0 \to \Lambda_0$. Supposons construite la résolution pour $n \geq 0$. La suite exacte $0 \to \Lambda_{n+1} \to \Lambda_{n+1} \to \Lambda_n \to 0$ induit pour tout entier k une suite exacte $0 \to \mathrm{M}_n(L_k^n)\widehat{\otimes}\Lambda_{n+1} \to \mathrm{M}_n(L_k^n)\widehat{\otimes}\Lambda_{n+1} \to \mathrm{M}_n(L_k^n)\widehat{\otimes}\Lambda_n \to 0$ par la proposition 1.4.1.16 ($\mathrm{M}_n(L_k^n)$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et est comme Λ_n nul en degré assez grand). Définissons le complexe double $C_{k,l} = \mathcal{O}_{n+1}(\mathrm{M}_n(L_k^n)\widehat{\otimes}\Lambda_{n+1})$ si $0 \leq k \leq n+1$ et $0 \leq l \leq 1$, $C_{k,l} = 0$ sinon, où la différentielle $C_{k+1,l} \to C_{k,l}$ est induite par le morphisme $L_{k+1}^n \to L_k^n$ et où la différentielle $C_{k,1} \to C_{k,0}$ est le morphisme induit par la multiplication par $x_{n+1} : \Lambda_{n+1} \to \Lambda_{n+1}$. On définit l'augmentation $C_{0,0} \to \mathbb{Z}/p$ comme la composée $C_{0,0} \to L_0^n \to \mathbb{Z}/p$; alors le complexe total associé au complexe double $C_{*,*}$ est une résolution de $\mathbb{Z}/p$ dans $\widehat{\mathcal{L}}_{n+1}$ de longueur $n+2$.

Soit maintenant M une $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre nulle en degré assez grand et $M_* \to M$ une résolution de M par des $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres libres et nulles en degré assez grand (par exemple la résolution canonique obtenue grâce à la structure de monade sur M). L'image par M_n du complexe augmenté $M_* \to M$ est une résolution libre de $\mathrm{M}_n(M)$ par le lemme suivant :

LEMME 1.4.1.18. *La restriction du foncteur M_n à la sous-catégorie pleine $\widehat{\mathcal{M}}_n^0$ formée des $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres nulles en degré assez grand est un foncteur exact.*

Démonstration. Le foncteur M_n est exact à droite par construction. Soit $N \to N'$ un morphisme injectif entre $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres nulles en degré assez grand. Le morphisme image par le foncteur composé $\mathcal{O}_n\mathrm{M}_n$ s'identifie au morphisme induit $N\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^* \to N'\widehat{\otimes}_n\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^*$ donc à l'image par l'oubli $\mathcal{O}_n$ du morphisme induit $\mathcal{O}N\widehat{\otimes}\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^*) \to \mathcal{O}N'\widehat{\otimes}\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^*)$. Il est injectif par la proposition 1.4.1.16 : $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_n\widehat{\mathrm{MU}}^*)$ est une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre libre et nulle en degré assez grand. $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition. Nous allons montrer que le conoyau du morphisme $\mathrm{M}_n(M_{n+2}) \to \mathrm{M}_n(M_{n+1})$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$, ce qui équivaut à montrer que l'objet $\mathrm{Tor}_{n+2}^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{M}_n(M), \mathbb{Z}/p)$ est nul. Le point (b) de la proposition 1.4.1.14 montre que pour toute paire de $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres N et P nulles en degré assez grand les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{M}_n(N)\widehat{\otimes}\mathcal{O}P$ et $\mathcal{O}N\widehat{\otimes}\mathrm{M}_nP$ sont naturellement isomorphes à la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathcal{O}(N\widehat{\otimes}_nP)$. Comme le foncteur M_n transforme les résolutions libres dans $\widehat{\mathcal{M}}_n$ en des résolutions libres dans $\widehat{\mathcal{M}}$, on en déduit les isomorphismes

$$\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{M}_n(M), \mathbb{Z}/p) \simeq \mathcal{O}\mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}_n}(M, \mathbb{Z}/p) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/p), \mathcal{O}M)$$

(observons que les foncteurs $\mathrm{Tor}(-,-)$ qui interviennent ici sont symétriques en leurs arguments par la proposition 1.4.1.16 et le corollaire 1.4.1.10 : les arguments sont nuls en degré assez grand). La $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre $\mathbb{Z}/p$ admet une résolution dans $\widehat{\mathcal{L}}_n$ de longueur $n+1$ ce qui permet de conclure. $\square$

Venons en aux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres de présentation en degré borné.

LEMME 1.4.1.19. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de présentation en degré borné ; alors il existe un entier n et un isomorphisme entre M et $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_n(M\widehat{\otimes}\Lambda_n))$.*

Démonstration. Soit $M_1 \to M_0 \to M$ une présentation libre de M avec M_1/f^1 et M_0/f^1 concentrés en un nombre fini de degrés. On suppose que M_1 et M_0 sont non nuls (à défaut M est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et on peut prendre $n=0$). Choisissons des isomorphismes $M_1 \simeq \widehat{\mathrm{L}}(S)$ et $M_0 \simeq \widehat{\mathrm{L}}(S')$; on obtient un morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$ dont le conoyau est isomorphe à M. On pose n comme égal à la différence entre le degré maximal d'un élément de S' et le degré minimal d'un élément de S. Le morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$ est adjoint d'un morphisme d'ensemble gradué $S \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$ qui se factorise par l'inclusion canonique $\widehat{\mathrm{L}}_n(S') \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$. On en déduit par adjonction un morphisme de $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbres $\widehat{\mathrm{L}}_n(S) \to \widehat{\mathrm{L}}_n(S')$ qui est l'image par le foncteur $N \mapsto \mathcal{O}_n(N\widehat{\otimes}\Lambda_n)$ du morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$ et dont l'image par M_n est, par construction, le morphisme $\widehat{\mathrm{L}}(S) \to \widehat{\mathrm{L}}(S')$. On conclut par l'exactitude à droite du foncteur $N \mapsto \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_n(N\widehat{\otimes}\Lambda_n))$. $\square$

PROPOSITION 1.4.1.20. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de présentation en degré borné ; alors M admet une résolution libre de longueur finie.*

Démonstration. La proposition est conséquence du lemme qui précède et de la proposition 1.4.1.17 appliquée à la $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre $\mathcal{O}_n(M\widehat{\otimes}\Lambda_n)$. $\square$

Produit tensoriel et limite

Soit (N_s, g_s) une tour de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres, où g_s désigne le morphisme $N_s \to N_{s-1}$. Sa limite dans $\widehat{\mathcal{M}}$, qu'on note N_∞, s'interprète comme le noyau du morphisme $\mathrm{Id} - (g_s) : \prod_s N_s \to \prod_s N_s$. On vérifie facilement que le MU^*-module filtré sous-jacent au produit des N_s est le produit des MU^*-modules N_s muni de la filtration produit. Nous étudions dans ce paragraphe les questions intimement liées du lien entre la filtration des N_s et la filtration de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre limite N_∞ et de la commutation du produit tensoriel aux limites indexées par les entiers.

Le MU*-module $\lim^1_s N_s$ s'interprète comme le conoyau du morphisme $\mathrm{Id}-(g_s)$; il hérite donc d'une structure naturelle de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre. L'exactitude du produit permet d'associer canoniquement à toute suite exacte courte $0 \to N'_s \to N_s \to N''_s \to 0$ de tours de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres la suite exacte

$$0 \to N'_\infty \to N_\infty \to N''_\infty \to \lim^1_s N'_s \to \lim^1_s N_s \to \lim^1_s N''_s \to 0\ .$$

Pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M, le morphisme $M \widehat{\otimes} \prod_s N_s \to \prod_s (M \widehat{\otimes} N_s)$ induit des morphismes $M \widehat{\otimes} N_\infty \to \lim_s (M \widehat{\otimes} N_s)$ et $M \widehat{\otimes} \lim^1_s N_s \to \lim^1_s (M \widehat{\otimes} N_s)$.

Soit maintenant $M_* \to M$ une résolution libre de M. On note K_n l'image du morphisme $M_{n+1} \to M_n$ et on pose $K_{-1} = M$ de sorte qu'on a une suite exacte $0 \to K_n \to M_n \to K_{n-1} \to 0$. Pour tout $n \geq 0$ on note $I_{n,s}$ l'image du morphisme $K_n \widehat{\otimes} N_s \to M_n \widehat{\otimes} N_s$; c'est aussi le noyau du morphisme $M_n \widehat{\otimes} N_s \to K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s$. La suite exacte $0 \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to K_n \widehat{\otimes} N_s \to M_n \widehat{\otimes} N_s \to K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s \to 0$ induit par passage à limite sur s des suites exactes

(1) $0 \to \lim_s \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) \to \lim_s I_{n,s} \to$
$\lim^1_s \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to \lim^1_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) \to \lim^1_s I_{n,s} \to 0$

et

(2) $0 \to \lim_s I_{n,s} \to \lim_s (M_n \widehat{\otimes} N_s) \to \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s) \to$
$\lim^1_s I_{n,s} \to \lim^1_s (M_n \widehat{\otimes} N_s) \to \lim^1_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s) \to 0.$

Lemme 1.4.1.21. *Soit (L_s) une tour d'objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ telle que pour tout entier s le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué L_s/f^1 est de dimension totale finie et la tour $(L_s/\mathrm{f}^1)_s$ est stationnaire en chaque degré ; alors pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M, le morphisme $M \widehat{\otimes} L_\infty \to \lim_s (M \widehat{\otimes} L_s)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Lorsque M est libre le morphisme $M \widehat{\otimes} L \to \lim_s (M \widehat{\otimes} L_s)$ est un isomorphisme par construction du produit tensoriel dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Pour M quelconque choisissons une résolution libre $M_* \to M$ de M. Comme chaque L_s est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module libre de dimension finie, la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, L_s)$ est nulle par comparaison des produits tensoriels dans $\widehat{\mathcal{M}}$ et dans la catégorie des $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules (lemme 1.2.3.10). Les suites exactes (1) et (2) se réduisent à la suite exacte $0 \to \lim_s (K_n \widehat{\otimes} L_s) \to M_n \widehat{\otimes} L_\infty \to \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} L_s) \to 0$ d'où on déduit que la suite $M_1 \widehat{\otimes} L_\infty \to M_0 \widehat{\otimes} L_\infty \to \lim_s (M \widehat{\otimes} L_s) \to 0$ est exacte ce qui permet de conclure. $\square$

Notons pour S un ensemble gradué et n un entier positif $S[n]$ le sous-ensemble gradué formé des éléments de S de degré compris entre $-n$ et n ;

le foncteur $S \mapsto S[n]$ induit une correspondance $L \mapsto L[n]$ sur $\widehat{\mathcal{L}}$ (qui n'est pas fonctorielle). Tout objet L de $\widehat{\mathcal{L}}$ s'identifie à la limite de la tour de surjections formée par les $L[s]$.

Si (L_s) est une tour d'objets de $\widehat{\mathcal{L}}$ telle que l'espace vectoriel L_s/f^1 est en chaque degré fini et stationnaire en s, alors le lemme appliqué successivement aux tours $(L_s[s])_s$ et $(L_s[t])_t$ montre que l'application $M\widehat{\otimes}L \to \lim_s(M\widehat{\otimes}L_s)$ est encore un isomorphisme pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M.

PROPOSITION 1.4.1.22. *Soit L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ tel que L/f^1 est fini en chaque degré ; alors :*

(a) *Pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,L)$ est nulle.*

(b) *Pour toute tour (N_s) de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres les applications $L\widehat{\otimes}N_\infty \to \lim_s(L\widehat{\otimes}N_s)$ et $L\widehat{\otimes}\lim^1_s N_s \to \lim^1_s(L\widehat{\otimes}N_s)$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Pour chaque entier positif s, la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $L[s]$ est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module libre de dimension finie donc vérifie les points (a) et (b) de la proposition. Soit alors M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et $M_* \to M$ une résolution libre de M. Les suites exactes (1) et (2) montrent que le morphisme $\lim_s(K_0\widehat{\otimes}L[s]) \to \lim_s(M_0\widehat{\otimes}L[s])$ est injectif, donc avec le lemme qui précède que le morphisme $K_0\widehat{\otimes}L \to M_0\widehat{\otimes}L$ est injectif ce qui équivaut au point (a).

Venons en au point (b) : Soit (N_s) une tour de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres. On a pour tout entier t une suite exacte $0 \to L[t]\widehat{\otimes}N_\infty \to \prod_s(L[t]\widehat{\otimes}N_s) \to \prod_s(L[t]\widehat{\otimes}N_s) \to L[t]\widehat{\otimes}\lim^1_s N_s \to 0$. Elle induit par passage à la limite et en utilisant ce qui précède une suite exacte $0 \to L\widehat{\otimes}N_\infty \to \prod_s(L\widehat{\otimes}N_s) \to \prod_s(L\widehat{\otimes}N_s) \to L\widehat{\otimes}\lim^1_s N_s \to 0$ (observer que la tour des conoyaux des morphismes $L[t]\widehat{\otimes}N_\infty \to \prod_s(L[t]\widehat{\otimes}N_s)$ est une tour de surjections donc est sans $\lim^1$), ce qui montre que les applications $L\widehat{\otimes}N_\infty \to \lim_s(L\widehat{\otimes}N_s)$ et $L\widehat{\otimes}\lim^1_s N_s \to \lim^1_s(L\widehat{\otimes}N_s)$ sont des isomorphismes. $\square$

PROPOSITION 1.4.1.23. *Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre admettant une résolution libre $M_* \to M$ avec M_n/f^1 fini en chaque degré quelque soit n. Soit N_s une tour de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres ; alors :*

(a) *L'application $M\widehat{\otimes}\lim^1_s N_s \to \lim^1_s(M\widehat{\otimes}N_s)$ est un isomorphisme.*

(b) *Supposons que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\lim^1_s N_s$ est nulle ; alors on a pour tout entier $n \geq 0$ une suite exacte*

$$0 \to \lim_s{}^1 \mathrm{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}_{n+1}(M,N_s) \to \mathrm{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}_n(M,N_\infty) \to \lim_s \mathrm{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}_n(M,N_s) \to 0\ .$$

(c) *Supposons que la* $\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbre* $\mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N_s)$ *est nulle pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout entier* s *; alors on a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Tor}_2^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, \lim{}_s^1 N_s) \to M \widehat{\otimes} N_\infty \to \lim{}_s (M \widehat{\otimes} N_s)$$
$$\to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, \lim{}_s^1 N_s) \to 0$$

et un isomorphisme $\mathrm{Tor}_{n+2}^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, \lim{}_s^1 N_s) \to \mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N_\infty)$ *pour tout* $n \geq 1$.

Démonstration. Le point (a) s'obtient en utilisant le début de la résolution libre de M, le point (b) de la proposition précédente et l'exactitude à droite du foncteur $\lim^1$ (sur des tours).

Si le terme $\lim{}_s^1 N_s$ est nul il en est de même du terme $\lim{}_s^1 (K_n \widehat{\otimes} N_s)$ par le point (a). Les suites exactes (1) et (2) se réduisent alors aux suites exactes $0 \to \lim_s \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) \to \lim_s I_{n,s} \to \lim{}_s^1 \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to 0$ et $0 \to \lim_s I_{n,s} \to M_n \widehat{\otimes} N_\infty \to \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s) \to 0$. On obtient la suite exacte $0 \to \lim{}_s^1 \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to K_{n-1} \widehat{\otimes} N_\infty \to \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s) \to 0$ comme la suite des conoyaux des flèches verticales du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) & = & \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) & \to & 0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \lim_s I_{n,s} & \to & M_n \widehat{\otimes} N_\infty & \to & \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s) & \to & 0
\end{array}$$

puis la suite exacte $0 \to \lim{}_s^1 \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_n, N_s) \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_\infty) \to \lim_s \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_s) \to 0$ comme la suite des noyaux des flèches verticales du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \lim{}_s^1 \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_\infty) & \to & K_n \widehat{\otimes} N_\infty & \to & \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \to & M_n \widehat{\otimes} N_\infty & = & M_n \widehat{\otimes} N_\infty & \to & 0\,.
\end{array}$$

Venons en au point (c) : Si la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_n^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N_s)$ est nul pour tout s et tout $n \geq 1$ alors les suites exactes (1) et (2) se réduisent à la suite exacte $0 \to \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) \to M_n \widehat{\otimes} N_\infty \to \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s) \to K_n \widehat{\otimes} \lim{}_s^1 N_s \to M_n \widehat{\otimes} \lim{}_s^1 N_s \to K_{n-1} \widehat{\otimes} \lim{}_s^1 N_s \to 0$ (on utilise le point (a)). Notons C_{n-1} l'image du morphisme $M_n \widehat{\otimes} N_\infty \to \lim_s (K_{n-1} \widehat{\otimes} N_s)$. Le lemme du serpent appliqué au diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C_n & \to & M_n \widehat{\otimes} N_\infty & \to & K_{n-1} \widehat{\otimes} N_\infty & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \to & \lim_s (K_n \widehat{\otimes} N_s) & \to & M_n \widehat{\otimes} N_\infty & \to & C_{n-1} & \to & 0
\end{array}$$

montre que le noyau du morphisme $K_{n-1}\widehat{\otimes}N_\infty \to C_{n-1}$ s'identifie à la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_n, \lim^1_s N_s)$ de sorte que la suite exacte issue de (1) et (2) devient

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_n, \lim^1_s N_s) \to K_{n-1}\widehat{\otimes}N_\infty \to \lim_s(K_{n-1}\widehat{\otimes}N_s) \\ \to \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, \lim^1_s N_s) \to 0.$$

Comme l'application $C_n \to M_n\widehat{\otimes}N_\infty$ est injective, le noyau du morphisme $K_n\widehat{\otimes}N_\infty \to M_n\widehat{\otimes}N_\infty$ est égal au noyau du morphisme $K_n\widehat{\otimes}N_\infty \to C_n$ donc les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n+1}, \lim^1_s N_s)$ et $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(K_{n-1}, N_\infty)$ sont isomorphes. $\square$

Première application. Soit N_s une tour de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres telle que les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\lim^1_s N_s$ et $\lim^1_s \mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^n, N_s), n \geq 1$, sont nulles ; alors l'application $N_\infty/\mathrm{f}^n \to \lim_s(N_s/\mathrm{f}^n)$ est un isomorphisme et la filtration de N_∞ est la filtration limite des filtrations des N_s. En particulier si chaque $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre N_s est complète pour sa filtration alors il en est de même de N_∞. On déduit de ces observations que si X est le complété profini d'un espace, la filtration de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre MU^*X est complète et qu'elle coïncide avec la filtration limite de la filtration de la MU-cohomologie continue des squelettes de X.

Nous terminons par une seconde approche de la commutation du produit tensoriel aux limites.

Proposition 1.4.1.24. *Soient L un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ et M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre admettant une résolution libre $M_* \to M$ telle que pour tout entier $n \geq 0$ M_n/f^1 est fini en chaque degré et nul en degré assez petit ; alors la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, L)$ est nulle et l'application $M\widehat{\otimes}L \to \lim_s(M/\mathrm{F}^s\widehat{\otimes}L)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le point (b) de la proposition 1.4.1.23 appliquée à la tour (L/F^s) montre que le cas général se déduit du cas où L est nulle en degré assez grand, ce que nous supposons désormais. Considérons la tour de complexes $(M_*/\mathrm{F}^s)_s$; chaque $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M_n/F^s est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module libre de dimension finie et le complexe obtenu en passant à la limite sur s a son homologie concentrée en degré 0. On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$, la tour formée par le n-ième objet d'homologie du complexe M_*/F^s est pro-triviale. Comme le foncteur $L\widehat{\otimes}-$ est exact sur $\widehat{\mathcal{M}}^0$, la tour de complexes induits $(L\widehat{\otimes}M_*/\mathrm{F}^s)$ a la même propriété. Comme chaque tour $(L\widehat{\otimes}M_n/\mathrm{F}^s)_s$ est une tour de surjections et a pour limite la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $L\widehat{\otimes}M_n$, le complexe

$L\widehat{\otimes}M_*$ a son homologie concentrée en degré 0, laquelle s'identifie à la limite de la tour $(L\widehat{\otimes}M/\mathrm{F}^s)_s$ ce qui implique le résultat. $\square$

COROLLAIRE 1.4.1.25. *Soient M et N deux $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres. On suppose que N admet une résolution libre $N_* \to N$ telle que pour tout entier $n \geq 0$ N_n/f^1 est fini en chaque degré et nul en degré assez petit ; alors on a pour tout entier n une suite exacte*

$$0 \to \lim_s{}^1 \operatorname{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}_{n+1}(M, N/\mathrm{F}^s) \to \operatorname{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}_n(M,N) \to \lim_s \operatorname{Tor}^{\widehat{\mathcal{L}}}_n(M, N/\mathrm{F}^s) \to 0\ .$$

Démonstration. Le corollaire se démontre exactement comme le point (b) de la proposition 1.4.1.23. $\square$

1.4.2. Résolutions des espaces

Les espaces profinis intervenant dans cette section seront le plus souvent pointés. Si X est un espace profini quelconque, on peut toujours le remplacer par X_+, la réunion disjointe de X et d'un point base.

Résolution instable

Rappelons que pour tout ensemble gradué S l'espace profini $\mathrm{K}(S)$ est pointé par l'application adjointe de l'application constante $S \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$ égale à 0. La structure de monade du foncteur $\widetilde{\mathrm{G}} : S \mapsto \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}(S)$ sur $\mathcal{E}$ns-gr permet d'associer à toute $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre M l'objet simplicial $\widetilde{\mathrm{G}}_\bullet(M)$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}_-}$ formé en chaque degré de $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbres libres, et un morphisme de $\widetilde{\mathrm{G}}_\bullet(M)$ dans la $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre simpliciale constante M qui est canoniquement une équivalence d'homotopie entre objets simpliciaux de $\mathcal{E}$ns-gr. On appelle la $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre simpliciale augmentée $\widetilde{\mathrm{G}}_\bullet(M) \to M$ la $\widetilde{\mathrm{G}}$-résolution simpliciale canonique de M.

Soit X un espace profini pointé ; la structure de monade du foncteur $\widetilde{\mathrm{R}} : X \mapsto \mathrm{K}(\widetilde{\mathrm{MU}}^*X)$ sur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ permet d'associer à X un objet cosimplicial $\widetilde{\mathrm{R}}^\bullet(X)$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ et une coaugmentation $X \to \widetilde{\mathrm{R}}^\bullet(X)$ induisant en MU-cohomologie réduite la $\widetilde{\mathrm{G}}$-résolution simpliciale canonique de $\widetilde{\mathrm{MU}}^*X$; on l'appelle la MU-résolution cosimpliciale canonique de X.

La même discussion vaut pour la G-algèbre simpliciale $\mathrm{G}_\bullet(M)$ associée à une MU-algèbre instable M et pour l'objet cosimplicial $\mathrm{R}^\bullet(X)$ associé à un espace profini X et à la structure de monade du foncteur $\mathrm{R} : X \mapsto$

$\mathrm{K}(\mathrm{MU}^*X)$ sur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$. Observons que si M est une MU-algèbre instable augmentée, le morphisme $\widetilde{\mathrm{G}}_\bullet(\widetilde{M})_+ \to \widetilde{M}_+ = M$ entre MU-algèbres instables augmentées simpliciales est une résolution de M par des G-algèbres libres.

Soient M une MU-algèbre instable et $M_\bullet \to M$ une résolution simpliciale de M par des MU-algèbres instables libres comme $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre, *i.e.*telle que le complexe augmenté induit $M_* \to M$ est une résolution libre de M dans $\widehat{\mathcal{M}}$. La proposition 1.4.1.3 montre que la $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable simpliciale augmentée $M_\bullet/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1$ est une résolution de M/f^1 si et seulement si M est libre comme $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre. De même pour les résolutions d'algèbres instables non unitaires. En particulier la MU-résolution cosimpliciale canonique d'un espace profini pointé sans p-torsion est une résolution pour la cohomologie modulo p continue.

Cocomplexes de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ *et résolutions*

On considère la sous-classe $\mathcal{L}$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ formée des espaces profinis image par K d'un ensemble gradué. L'adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{K}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\mathrm{ns\text{-}gr}}(S, \mathrm{MU}^*X)$ et la structure additive de la MU-cohomologie continue d'un espace profini munissent les objets de $\mathcal{L}$ d'une structure d'objet en cogroupe abélien.

Rappelons qu'un cocomplexe de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ est une suite de morphismes $X^0 \to X^1 \to \cdots$ telle que les composées $X^n \to X^{n+1} \to X^{n+2}$ sont triviales pour tout entier $n \geq 0$. Un tel cocomplexe est appelé K-cocomplexe si les espaces profinis X^n sont dans $\mathcal{L}$ pour tout $n \geq 0$.

On vérifie facilement d'une part qu'un cocomplexe coaugmenté est acyclique relativement à $\mathcal{L}$ si et seulement si le complexe induit en MU-cohomologie continue réduite est acyclique, d'autre part que deux morphismes homotopes entre cocomplexes induisent en MU-cohomologie continue des morphismes homotopes entre complexes de $\widehat{\mathcal{M}}$.

La proposition suivante est un mime dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ de la proposition 1.4.1.1 :

PROPOSITION 1.4.2.1. *Soient* $Y \to K^*$ *un* K*-cocomplexe coaugmenté de* $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ *et* $X \to X^*$ *un cocomplexe coaugmenté dont l'image en* MU*-cohomologie réduite est acyclique ; alors tout morphisme de* X *dans* Y *se relève en un morphisme de* X^* *dans* K^* *unique à homotopie près.*

La proposition suivante indique en reprenant la construction de Rector ([RE]) le lien entre objet cosimplicial et cocomplexe de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$.

Proposition 1.4.2.2. *Soit $X^\bullet$ un objet cosimplicial de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$; il existe un cocomplexe $\mathrm{N}^*(X^\bullet)$ et pour tout entier n un morphisme $X^n \to \mathrm{N}^n(X^\bullet)$ induisant un isomorphisme $\mathrm{MU}^*\mathrm{N}^*(X^\bullet) \to \mathrm{N}_*(\mathrm{MU}^*X^\bullet)$ entre complexes de $\widehat{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. On définit $\mathrm{N}^n(X^\bullet)$ comme l'espace profini X^0 pour $n = 0$ et comme la colimite homotopique du diagramme de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ formé du morphisme trivial $X^{n-1} \to X^n$ et des cofaces d^i, $1 \leq i \leq n$, pour un choix de représentants des d^i dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. L'égalité à homotopie près des composées $\mathrm{d}^0\mathrm{d}^i$ et $\mathrm{d}^{i+1}\mathrm{d}^0$ montre l'existence d'une application $\mathrm{N}^n(X^\bullet) \to \mathrm{N}^{n+1}(X^\bullet)$ telle que les composées $X^n \to X^{n+1} \to \mathrm{N}^{n+1}(X^\bullet)$ et $X^n \to \mathrm{N}^n(X^\bullet) \to \mathrm{N}^{n+1}(X^\bullet)$ sont homotopes. On vérifie enfin que l'application $X^n \to \mathrm{N}^n(X^\bullet)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{MU}^*\mathrm{N}^n(X^\bullet)$ dans le normalisé de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre simpliciale $\mathrm{MU}^*X^\bullet$. $\square$

Nous appelons cocomplexe coaugmenté de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ une suite de cofibrations $(C^n \to X^n)_{n\geq 0}$ tel que C^{n+1} est le quotient de X^n par C^n pour tout n (nous nous écartons donc un peu de la terminologie générale que nous avons introduite). Une telle suite est déterminée par l'application $C^0 \to X^0$ et les composées $X^n \to C^{n+1} \to X^{n+1}$; on la note $C^0 \to X^*$. Elle induit un cocomplexe coaugmenté $C^0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$.

Lemme 1.4.2.3.

(a) *Soit $X \to X^*$ un cocomplexe coaugmenté de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$; il existe un cocomplexe coaugmenté $X \to X'^*$ de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ et un isomorphisme du cocomplexe coaugmenté de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ induit dans $X \to X^*$ étendant l'identité de X.*

(b) *Soit $Y \to Y^*$ un autre cocomplexe coaugmenté de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$; alors tout morphisme $(X \to X^*) \to (Y \to Y^*)$ entre les cocomplexes coaugmentés de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ induits se relève en un morphisme $(X \to X'^*) \to (Y \to Y^*)$ entre cocomplexes coaugmentés de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$.*

On appelle détermination d'un cocomplexe coaugmenté $X \to X^*$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ un cocomplexe coaugmenté $X \to X'^*$ de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ satisfaisant au point (a) du lemme.

Soit à nouveau X un espace profini pointé. On appelle MU-résolution libre de X un cocomplexe coaugmenté $X \to X^*$ de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ tel que les espaces profinis X^n sont sans p-torsion et le complexe augmenté induit $\widetilde{\mathrm{MU}}^*X^* \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*X$ est acyclique.

Tout espace profini pointé X admet une résolution par des objets de $\mathcal{L}$ qu'on construit inductivement en posant $C^0 = X$, en choisissant pour tout entier k une cofibration $C^k \to X^k$ isomorphe dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ au morphisme $\epsilon(C^k) : C^k \to \mathrm{K}(\widetilde{\mathrm{MU}}^*C^k)$ et en définissant C^{k+1} comme le quotient X^k/C^k. La proposition 1.4.2.1 et le lemme ci-dessus indique qu'une telle résolution est universelle parmi les MU-résolutions libres de X. Observons qu'on peut également obtenir une MU-résolution libre de X en choisissant une détermination dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ d'un normalisé de la MU-résolution cosimpliciale canonique de X.

On appelle longueur d'une MU-résolution libre $X \to X^*$ de X la borne inférieure (éventuellement infini) des entiers n tels que C^{n+1} est le point.

Exemple. Soit n un entier positif ; la cofibre de l'application canonique $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BS}^1$ s'identifie à l'espace de Thom, qu'on note Th_n, du produit tensoriel du fibré en droites canonique sur BS^1 p^n fois par lui même. L'isomorphisme de Thom montre que l'espace Th_n est sans p-torsion de sorte que la suite $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BS}^1 \to \mathrm{Th}_n \to \mathrm{pt}$ est une MU-résolution libre de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ de longueur 1.

PROPOSITION 1.4.2.4. *Soit X un espace profini (pointé) de dimension finie ; alors X admet une* MU-*résolution libre de longueur finie par des espaces profinis de dimension finie.*

Démonstration. Supposons X de dimension n. On construit d'abord inductivement une MU-résolution libre de X par des espaces profinis de dimension inférieure ou égale à n. Posons $C^0 = X$; l'espace C^k étant construit et de dimension inférieure ou égale à n, on choisit une cofibration $C^k \to Y$ isomorphe dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ au morphisme $\epsilon(C^k) : C^k \to \mathrm{K}(\widetilde{\mathrm{MU}}^*C^k)$; elle se factorise par le squelette n-ième de Y qui est encore sans p-torsion. On pose alors $X^k = \mathrm{Sk}_n(Y)$ et $C^{k+1} = X^k/C^k$. L'espace profini C^k est de dimension inférieure ou égale à n.

Le début de la résolution libre $\widetilde{\mathrm{MU}}^*X^1 \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*X^0 \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*X$ montre que $\widetilde{\mathrm{MU}}^*X$ est une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de présentation en degré bornée et précisément la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre issue d'une $\widehat{\mathrm{L}}_n$-algèbre par extension des scalaires. Elle admet une résolution libre de longueur $n+1$ par la proposition 1.4.1.17. La $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\widetilde{\mathrm{MU}}^*C^{n+1} = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{MU}}^*X^n \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*X^{n-1})$ est alors dans $\widehat{\mathcal{L}}$ par la proposition 1.4.1.6 de sorte que l'espace profini C^{n+1} est sans p-torsion par la proposition 1.2.1.8. La suite $X \to X^0 \to \cdots \to X^n \to C^{n+1} \to \mathrm{pt}$ est une MU-résolution libre de X de longueur $n+1$. $\square$

Remarque. On sait que lorsque X est un espace profini sans p-torsion l'application $\mathrm{MU}^0X/\mathrm{f}^1 \to \mathrm{H}^0X$ est une bijection, ce qui entraîne que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{pt}, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}^* X, \widehat{\mathrm{MU}^*})$ est une bijection. Soit X un espace profini pointé connexe ; on peut choisir le début d'une résolution libre $X \to X^0 \to X^1$ de X par des espaces profinis pointés connexes : il suffit de sélectionner la composante connexe du point base. L'application $\mathrm{H}^0 X^0 \to \mathrm{H}^0 X$ est alors un isomorphisme ce qui montre que l'application $\mathrm{MU}^0 X/\mathrm{f}^1 \to \mathrm{H}^0 X$ est encore un isomorphisme. Ce résultat se généralise immédiatement à des espaces profinis avec un nombre fini de composantes connexes.

1.4.3. MU-résolutions et suites spectrales

Soit M une théorie cohomologique réduite sur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$, *i.e.*un foncteur $M^*(-)$ défini sur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ et à valeurs dans une catégorie abélienne graduée $\mathcal{A}$, associant au point l'objet nul de $\mathcal{A}$ et muni pour toute application $f : X \to Y$ dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ d'un morphisme $\partial_f : M^{*-1}Y \to M^*\mathrm{C}_f$ induisant un triangle exact

$$\begin{tikzcd} M^*Y \arrow[rr] & & M^*X \arrow[dl, "\partial"] \\ & M^*\mathrm{C}_f \arrow[ul] & \end{tikzcd} .$$

A tout cocomplexe coaugmenté $X \to X^*$ de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ on associe la suite spectrale du deuxième cadrant issue du triangle exact

$$\begin{tikzcd} M^*C^s \arrow[rr, "\partial"] & & M^*C^{s+1} \arrow[dl] \\ & M^*X^s \arrow[ul] & \end{tikzcd} ,$$

en choisissant la graduation telle que $\mathrm{E}_1^{-s,t}$ est l'objet $M^t X^s$; on la note $(\mathrm{E}_r(M, X \to X^*))$. Le terme $\mathrm{E}_2^{s,t}$ est le s-ième groupe d'homologie du complexe $M^t X^*$ et s'identifie au terme $\pi_s M^t X^\bullet$ lorsque X^* est une détermination dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ d'un normalisé d'un objet cosimplicial $X^\bullet$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. La différentielle d_r est de bidegré $(-r, r-1)$. La suite spectrale converge fortement vers l'objet gradué associé à une filtration croissante finie de M^*X s'il existe un entier $s \geq 0$ tel que C^s est le point.

Supposons maintenant qu'il existe un foncteur $M' : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{A}$ et, pour tout espace profini pointé Y, un morphisme naturel $M'(\widehat{\mathrm{MU}^*Y}) \to M^*Y$ qui est un isomorphisme si Y est sans p-torsion. Soit $X \to X^*$ une MU-résolution libre de X ; on obtient une suite spectrale $(\mathrm{E}_r(M, X \to X^*))$ dont le terme $\mathrm{E}_2^{s,*}$ est naturellement isomorphe au s-ième objet d'homologie de l'image par M' du complexe $\widetilde{\mathrm{MU}^*X^*}$, lequel est indépendant du choix de la résolution libre de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\widetilde{\mathrm{MU}^*}X$. Fixons une détermination $X \to K^*$ dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ d'une résolution de X par un K-cocomplexe. La proposition 1.4.2.1 et le lemme 1.4.2.3 fournit un morphisme $(X \to X^*) \to (X \to K^*)$ entre cocomplexes coaugmentés de $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. Celui-ci induit un morphisme $\mathrm{E}_r(M, X \to K^*) \to \mathrm{E}_r(M, X \to X^*)$ entre suites spectrales qui est un isomorphisme (canonique) au niveau des termes E_2. Autrement dit, la suite spectrale $(\mathrm{E}_r(M, X \to X^*))$ est indépendante du choix de la MU-résolution libre de X.

Nous illustrons cette suite spectrale par deux exemples : les généralisations de la formule de Künneth et de la formule de coefficients universels.

Proposition 1.4.3.1. *Soient X et Y deux espaces profinis. On suppose que pour tout entier $s \geq 1$ la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre* $\mathrm{Tor}_s^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*X, \mathrm{MU}^*Y)$ *est nulle, que Y admet une résolution libre de longueur finie et que X admet une résolution libre de longueur finie $X \to X^*$ telle que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre* $\mathrm{Tor}_s^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*Y, \mathrm{MU}^*X^n)$ *est nulle pour tout $s \geq 1$ et $n \geq 0$; alors l'application* $\mathrm{MU}^*X \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X \times Y$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. On commence par montrer que l'application $\mathrm{MU}^*X^n \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X^n \times Y$ est un isomorphisme pour tout n. C'est vrai si Y est sans p-torsion. Choisissons une MU-résolution libre $Y_+ \to Y^*$ de Y_+ de longueur finie. Le foncteur $\widetilde{\mathrm{MU}}^*(X_+^n \wedge -)$ est une théorie cohomologique réduite ($X_+ \wedge -$ commute aux cofibres par la formule de Künneth en cohomologie modulo p). La suite spectrale associée $(\mathrm{E}_r(\widetilde{\mathrm{MU}}^*(X_+^n \wedge -), Y_+ \to Y^*))$ converge fortement vers $\widetilde{\mathrm{MU}}^*(X_+^n \wedge Y_+) = \mathrm{MU}^*X^n \times Y$ et à pour terme $\mathrm{E}_2^{s,*}$ la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{H}_s(\widetilde{\mathrm{MU}}^*X_+^n \wedge Y^*) \simeq \mathrm{Tor}_s^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*Y, \mathrm{MU}^*X^n)$ donc est concentrée sur la première colonne, ce qui implique que l'application $\mathrm{MU}^*X^n \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X^n \times Y$ est un isomorphisme.

On obtient que le morphisme $\mathrm{MU}^*X \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X \times Y$ est un isomorphisme par le même argument en utilisant la suite spectrale associée à la théorie cohomologique $\widetilde{\mathrm{MU}}^*(- \wedge Y)$ et à la résolution $X \to X^*$. $\square$

Exemple. Prenons pour X et Y deux espaces profinis de dimension finie tels que X est sans p-torsion ; alors l'application $\mathrm{MU}^*X \widehat{\otimes} \mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X \times Y$ est un isomorphisme. On pourrait également démontrer ce résultat en utilisant la filtration squelettale de Y.

Corollaire 1.4.3.2. *Soient X et Y deux espaces profinis tels que X est sans p-torsion et de cohomologie modulo p finie en chaque degré ; alors l'application* $\mathrm{MU}^*X\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*Y \to \mathrm{MU}^*X\times Y$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Le corollaire est conséquence directe de la proposition lorsque Y est de dimension finie. Le cas général s'obtient en comparant les suites exactes

$$0 \to \lim_s^1 \mathrm{MU}^{*-1}X\times \mathrm{Sk}_sY \to \mathrm{MU}^*X\times Y \to \lim_s \mathrm{MU}^*X\times \mathrm{Sk}_sY \to 0 \text{ et}$$
$$0 \to \mathrm{MU}^*X\widehat{\otimes}\lim_s^1\mathrm{MU}^{*-1}\mathrm{Sk}_sY \to \mathrm{MU}^*X\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*Y \to \lim_s MU^*X\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*\mathrm{Sk}_sY \to 0,$$

l'exactitude de la seconde suite étant conséquence de la proposition 1.4.1.22. □

La proposition 1.4.3.1 et la discussion qui précède entraînent :

Proposition 1.4.3.3. *Soient X et Y deux espaces profinis de dimension finie ; alors il existe une suite spectrale de terme* $\mathrm{E}_2^{s,*} = \mathrm{Tor}_s^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*X, \mathrm{MU}^*Y)$ *convergeant fortement vers* $\mathrm{MU}^*X\times Y$.

Venons en maintenant au lien entre MU-cohomologie continue et cohomologie modulo p continue dans le cas général.

Proposition 1.4.3.4. *Soit X un espace profini de dimension finie ; alors il existe une suite spectrale de terme* $\mathrm{E}_2^{s,*} = \mathrm{Tor}_s^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*X, \mathrm{MU}^*/\mathrm{f}^1)$ *convergeant fortement vers* $(\mathrm{H}\mathbb{Z}/p)^*X$.

Application. Soit X le complété profini d'un espace dont la MU-cohomologie continue est dans $\widehat{\mathcal{L}}$; alors X est sans p-torsion : On montre en effet que la MU-cohomologie continue des squelettes de X se surjecte sur leur cohomologie modulo p continue en comparant les suites spectrales de coefficients universels associées à $\Sigma\mathrm{Sk}_nX$ et $\mathrm{Sk}_mX/\mathrm{Sk}_nX$, $m \geq n$ et en passant à la limite sur m (l'hypothèse que X est le complété profini d'un espace sert à garantir l'absence de $\lim^1$).

Formule de Künneth pour la MU-*cohomologie du classifiant d'un p-groupe abélien fini*

Nous exploitons le résultat suivant dû à Landweber (où nous avons remplacé l'anneau de coefficients MU^* par son p-complété) :

Proposition 1.4.3.5. ([Lan]) *Pour tout entier n et tout $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module M de présentation finie le $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module* $\mathrm{Tor}^{\widehat{\mathrm{MU}}^*}(\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, M)$ *est nul.*

Landweber en déduit une formule de Künneth pour la MU-cohomologie du produit de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ par un espace dont chacun des squelettes est fini. Nous nous intéressons à un cas particulier.

Proposition 1.4.3.6. *Soient π et π' deux groupes de Lie compacts commutatifs.*

(a) *Pour tout objet L de $\widehat{\mathcal{L}}$ la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi, \mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi'\widehat{\otimes}L)$ est nulle.*

(b) *Pour tout espace profini X sans p-torsion, l'application*

$$\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi'\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi \times \mathrm{B}\pi' \times X$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Rappelons que la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ formée des $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules admettant une famille de générateurs finie en chaque degré et vide en degré assez grand est aussi une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{M}}$ et que les objets $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathrm{MU}}^*}(M,N)$ et $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N)$ associés à une paire (M,N) de tels $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-modules coïncident (propositions 1.4.1.11 et 1.4.1.12).

Soit n un élément de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Notons B_n le classifiant du groupe $\mathbb{Z}/p^n$ si n est fini, du groupe S^1 sinon, et notons P_n la MU-cohomologie complétée en p de B_n. Notons enfin K_n le noyau du morphisme canonique $\mathrm{P}_\infty \to \mathrm{P}_n$; la suite $0 \to \mathrm{K}_n \to \mathrm{P}_\infty \to \mathrm{P}_n$ est une résolution libre de P_n de longueur 1 par des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres libres sur un ensemble gradué fini en chaque degré et vide en degré assez bas.

Soit $(n_1, \ldots, n_k)$ une famille d'éléments de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$; on montre par récurrence sur $k \geq 2$ les trois propriétés suivantes :

(1) la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_{n_1}, \mathrm{P}_{n_2}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_3})$ est nulle ;

(2) la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}$ admet une résolution libre de longueur finie par des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres libres sur un ensemble gradué fini en chaque degré et vide en degré assez bas ;

(3) L'application $\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k} \to \mathrm{MU}^*\mathrm{B}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{B}_{n_k}$ est un isomorphisme.

Soit M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre admettant une résolution libre $M_* \to M$ avec M_n/f^1 fini en chaque degré et nul en degré assez petit quelque soit n ;

chaque quotient M/F^s est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module de présentation finie donc la tour (M/F^s) est sans $\lim^1$ et M s'identifie à la limite de cette tour (lemme 1.2.3.9). La proposition 1.4.1.23 montre que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_k^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_{n_1}, M)$ est nulle pour tout $k \geq 1$. En particulier la propriété (2) au rang $k-1$ (vrai pour $k=2$) implique la propriété (1) au rang k. Celle-ci implique que le produit tensoriel du complexe $\cdots 0 \to \mathrm{K}_{n_1} \to \mathrm{P}_\infty$ avec une résolution libre de $\mathrm{P}_{n_2}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}$ répondant à la condition (2) est une résolution libre de $\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}$ répondant à la condition (2). La propriété (3) au rang k est alors conséquence des propriétés (2) et (3) au rang $k-1$ par la proposition 1.4.3.1.

La proposition 1.4.1.24 montre que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}, L)$ est nulle pour tout objet $L \in \widehat{\mathcal{L}}$. On en déduit par le corollaire 1.4.1.10 que pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M les $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}, M)$ et $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, \mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k})$ sont naturellement isomorphes. On montre alors par récurrence sur $\min(k,l)$ que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}, \mathrm{P}_{n'_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n'_l})$ est nulle en observant que pour tout triplet de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres M, N, N' les conditions $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M,N) = 0$ et $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M\widehat{\otimes}N, N') = 0$ impliquent la condition $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(M, N\widehat{\otimes}N') = 0$. Le même argument montre que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_{n_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n_k}, \mathrm{P}_{n'_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathrm{P}_{n'_l}\widehat{\otimes}L)$ est nulle, d'où le point (a) de la proposition. Le point (b) s'obtient par la proposition 1.4.3.1. $\square$

Remarque. Soient n et t deux entiers positifs. On peut montrer que la tour de $\widehat{\mathrm{L}}_t$-algèbres $\mathcal{O}_t((\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n)/\mathrm{F}^s)_s$ est pro-isomorphe à une tour d'objets de $\widehat{\mathcal{L}}_t$. On en déduit que pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre M nulle en degré assez grand et image par le foncteur M_t d'une $\widehat{\mathrm{L}}_t$-algèbre, la tour de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}((\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n)/\mathrm{F}^s, M)$ est pro-triviale, puis que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, M)$ est nulle. On en déduit une formule de Künneth pour le produit du classifiant d'un p-groupe abélien fini π avec un espace profini de dimension finie. On n'en déduit cependant pas une formule de Künneth lorsque X est quelconque : le terme $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi, \lim_s^1 \mathrm{MU}^*\mathrm{Sk}_s X)$ qui apparait par le point (c) de la proposition 1.4.1.23 n'est pas nul *a priori*.

1.5. Conclusion

Nous montrons dans cette section comment l'analyse classique de la cohomologie modulo p continue des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire se reproduit dans la catégorie $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

Soit P un objet de $\widehat{\mathcal{L}}$ tel que P/f^1 est fini en chaque degré, alors le foncteur $\widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}$, $N \mapsto P\widehat{\otimes}N$ est exact par le point (a) de la proposition 1.4.1.22 et commute aux produits infinis par le point (b) de la même proposition (le fait que P/f^1 est fini en chaque degré est crucial pour cette dernière propriété).

Lemme 1.5.1. *Le foncteur $\widehat{\mathcal{M}} \to \widehat{\mathcal{M}}$, $N \mapsto P\widehat{\otimes}N$ admet un adjoint à gauche qu'on note $(M : P)_{\widehat{\mathcal{M}}}$.*

Démonstration. L'existence de l'adjoint est claire lorsque P est un $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module libre de dimension finie et s'en déduit par un argument de passage à la limite dans le cas général. Explicitement : Pour S un ensemble gradué, on note S_- l'ensemble gradué obtenu en renversant le signe des degrés et $S[n]$ le sous-ensemble gradué de S formé des éléments de degré compris entre $-n$ et n. Les foncteurs $S \mapsto S_-$ et $S \mapsto S[n]$ induisent des foncteurs $L \mapsto L_-$ et $L \mapsto L[n]$ sur $\widehat{\mathcal{L}}$. Le foncteur $N \mapsto P[n]_-\widehat{\otimes}N$ muni de la transformation naturelle $N \to P[n]\widehat{\otimes}P[n]_-\widehat{\otimes}N$ est adjoint à gauche du foncteur $N \mapsto P[n]\widehat{\otimes}N$. Pour toute $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre N, la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $P\widehat{\otimes}N$ est la limite des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $P[n]\widehat{\otimes}N$ (cf la démonstration de la proposition 1.4.1.22). On définit $(M : P)_{\widehat{\mathcal{M}}}$ comme la colimite dans $\widehat{\mathcal{M}}$ des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $M\widehat{\otimes}P[n]_-$. $\square$

Observons que l'image par le foncteur $(- : P)_{\widehat{\mathcal{M}}}$ d'une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre libre est libre.

Proposition 1.5.2. *Soit P une* MU*-algèbre instable telle que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et telle que P/f^1 est fini en chaque degré, alors le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, $N \mapsto P\widehat{\otimes}N$ admet un adjoint à gauche qu'on note $(- : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$.*

Démonstration La proposition s'obtient par adjonction : pour tout ensemble gradué S, le foncteur $N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{G}(S), P\widehat{\otimes}N)$ est représentable par la G'-algèbre libre $\mathrm{G}'((\widehat{\mathrm{L}}(S) : P)_{\widehat{\mathcal{M}}})$. Pour $M \in \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ quelconque, on définit $(M : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$ comme le coégalisateur du 1-complexe $(\mathrm{G}^2(M) : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \leftrightarrows (\mathrm{G}(M) : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$ induit par le 1-complexe $\mathrm{G}^2(M) \leftrightarrows \mathrm{G}(M)$. $\square$

Soit X un espace sans p-torsion dont la cohomologie modulo p est finie en chaque degré ; on note encore MU^*X sa MU-cohomologie complétée en p (qui est aussi la MU-cohomologie continue du complété profini de X). Soit Y un espace profini ; l'espace X étant la colimite filtrante de ses sous-ensembles finis simpliciaux, l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(X, Y)$ est naturellement profini. Le corollaire 1.4.3.2 indique que la MU-cohomologie continue du produit

$X \times Y$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel $\mathrm{MU}^*X\widehat{\otimes}\mathrm{MU}^*Y$. L'évaluation $X \times \mathbf{hom}(X,Y) \to Y$ induit donc un morphisme $(\mathrm{MU}^*Y : \mathrm{MU}^*X)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(X,Y)$.

Proposition 1.5.3. *Soit X un espace dont la cohomologie à coefficients dans les entiers p-adiques est libre et de dimension finie en chaque degré et soit S un ensemble gradué, alors l'application naturelle*

$$(\mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S) : \mathrm{MU}^*X)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(X,\mathrm{K}(S))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La proposition vient de ce que le terme $(\mathrm{MU}^*\mathrm{K}(S) : \mathrm{MU}^*X)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$ s'identifie par adjonction à l'image par G' de la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre libre $(\widehat{\mathrm{L}}(S) : \mathrm{MU}^*X)_{\widehat{\mathcal{M}}}$ et de même de ce que l'espace profini $\mathbf{hom}(X,\mathrm{K}(S))$ s'identifie par adjonction et par la formule de Künneth à l'image par K' de la même $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $(\widehat{\mathrm{L}}(S) : \mathrm{MU}^*X)_{\widehat{\mathcal{M}}}$. $\square$

Les deux propositions précédentes admettent une version réduite qui se démontre de la même façon :

Proposition 1.5.4.

(a) *Soit P une* MU*-algèbre instable non unitaire dont la* $\widehat{\mathrm{L}}$*-algèbre sous-jacente est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et telle que P/f^1 est fini en chaque degré, alors le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}$, $N \mapsto P\widehat{\otimes}N$ admet un adjoint à gauche $(- : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}}$.*

(b) *Soient X un espace pointé dont la cohomologie à coefficients dans les entiers p-adiques est libre et de dimension finie en chaque degré et soit S un ensemble gradué, alors l'application naturelle*

$$(\widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}(S) : \widetilde{\mathrm{MU}}^*X)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}} \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X,\mathrm{K}(S))$$

est un isomorphisme.

Soit P une MU-algèbre instable vérifiant les hypothèses de la proposition 1.5.2 et notons $\mathcal{O}P$ la $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre sous-jacente. L'adjonction entre $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ et $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}$ montre que l'algèbre instable $(\mathrm{G}(S) : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$ s'identifie canoniquement à $((\widetilde{\mathrm{G}}(S) : \mathcal{O}P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,-}})_+$; En particulier elle est augmentée (on vérifie que l'augmentation $(\mathrm{G}(S) : P)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$ est adjointe du morphisme trivial $\mathrm{G}(S) \to \widehat{\mathrm{MU}}^* \to P$).

Soit Y un espace profini quelconque qu'on suppose pointé. La MU-résolution cosimpliciale canonique $Y \to \mathrm{R}^\bullet(Y)$ de Y induit un objet cosimplicial coaugmenté $\mathbf{hom}(X,Y) \to \mathbf{hom}(X,\mathrm{R}^\bullet(Y))$ de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. En choisissant une détermination dans $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ d'un normalisé de cet objet cosimplicial, on obtient une suite spectrale de terme $\mathrm{E}_2^{s,*} = \pi_s(\widetilde{\mathrm{G}}_\bullet(\widetilde{\mathrm{MU}^*Y}) : \widetilde{\mathrm{MU}^*X})_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}_-}}$ (dont la convergence pose problème à priori). Nous verrons dans la prochaine partie que si X est le classifiant du groupe S^1 et Y est un espace profini sans p-torsion, le terme E_2 de la suite spectrale est concentré sur la première colonne et que l'application $(\mathrm{MU}^*Y : \mathrm{MU}^*\mathrm{BS}^1))_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}} \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1,Y)$ est un isomorphisme.

2. Cohomologie continue des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un p-groupe abélien fini ou d'un tore

2.1. Propriétés de la cohomologie modulo p des espaces fonctionnels de source le classifiant de $\mathbb{Z}/p^n$ ou de S^1

Cette section rappelle les propriétés de la cohomologie modulo p continue des espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ mises en évidence dans [DL].

Notons $\mathrm{H}^*(-)$ la cohomologie modulo p continue et $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p$ la cohomologie modulo p du classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. Le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$, $N \mapsto \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes N$ admet un adjoint à gauche noté T. Les propriétés du foncteur T (voir [LA1]) et son interprétation géométrique ([LA1], [DS], [MO2]) motivent les résultats des deux prochaines sections et sont à la base de leur démonstration. Nous les rappelons par les deux théorèmes ci-dessous.

THÉORÈME 2.1.1.

(a) *Soient M', M et M'' des $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbres instables et $M' \to M$, $M \to M''$ des combinaisons linéaires formelles de morphismes de $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$. On suppose que la suite de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels induites $M' \to M \to M''$ est exacte ; alors il en est de même de la suite induite $\mathrm{T}M' \to \mathrm{T}M \to \mathrm{T}M''$.*

(b) *Soit X un espace profini fibrant ; alors le morphisme* $\mathrm{TH}^*X \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, X)$*, induit par l'évaluation* $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \times \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, X) \to X$*, est un isomorphisme.*

Le point (a) se reformule à l'aide de la terminologie suivante : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des catégories, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des foncteurs de $\mathcal{C}$, respectivement $\mathcal{C}'$, dans des catégories abéliennes $\mathcal{A}$, respectivement $\mathcal{A}'$, et soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. Nous dirons que le foncteur $C \mapsto \mathcal{O}'F(C)$ est exact en $\mathcal{O}C$ si pour toutes combinaisons linéaires formelles de morphismes $C' \to C$ et $C \to C''$ telles que la suite $\mathcal{O}C' \to \mathcal{O}C \to \mathcal{O}C''$ est exacte, la suite induite $\mathcal{O}'F(C') \to \mathcal{O}'F(C) \to \mathcal{O}'F(C'')$ est également exacte.

Le foncteur T possède un analogue "équivariant" ([LA1, chap. 4]) : Notons $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ la catégorie des morphismes $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \to M$, $M \in \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ (les $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p$-algèbres). Le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$, $M \mapsto \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes M$ admet un adjoint à gauche noté Fix. Soit X un espace profini fibrant muni d'une action de $\mathbb{Z}/p$; on lui associe la construction de Borel $X_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ et l'espace profini des points fixes homotopiques $X^{h\mathbb{Z}/p}$ (cf la section 1.1.2). Rappelons que ce dernier s'interprète comme la fibre en l'identité de la fibration $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, X_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{B}\mathbb{Z}/p)$. L'application d'évaluation $\mathrm{E}\mathbb{Z}/p \times X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p} \to X$ induit un morphisme $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \times X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p} \to X_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ d'espaces profinis au dessus de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$, lequel induit un morphisme $\mathrm{Fix}(\mathrm{H}^*X_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}) \to \mathrm{H}^*X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$.

Notons $\mathcal{O}$ l'oubli $\mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathcal{E}$. Le théorème précédent et l'analyse faite dans [LA1, chap. 4] conduisent au :

THÉORÈME 2.1.2.

(a) *Le foncteur* $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p - \mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathcal{E}$, $M \mapsto \mathcal{O}\mathrm{Fix}(M)$ *est exact en* $\mathcal{O}M$.

(b) *Soit X un espace profini fibrant muni d'une action de $\mathbb{Z}/p$; alors l'application* $\mathrm{Fix}(\mathrm{H}^*X_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}) \to \mathrm{H}^*X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ *est un isomorphisme.*

Passage du classifiant de $\mathbb{Z}/p$ au classifiant d'un p-groupe cyclique

On dispose pour chaque entier n d'une suite exacte de pro-p-groupes abéliens simpliciaux $0 \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1} \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \to 0$ de sorte que le classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ est muni d'une action de $\mathbb{Z}/p$ dont le quotient homotopique est le classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$ (voir la section 1.1.3).

Soient X un espace profini fibrant et n un entier positif. L'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}, X)$ s'interprète comme l'espace des points fixes homotopiques de l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ pour l'action de $\mathbb{Z}/p$ à la source (cf [DL, chap. 3]). La cohomologie modulo p continue de l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}, X)$ est donc l'image par le foncteur Fix de la cohomologie modulo p continue du quotient homotopique $(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X))_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$, laquelle est l'aboutissement de la suite spectrale de Serre de terme $\mathrm{E}_2^{s,t} = \mathrm{H}^s\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \otimes \mathrm{H}^t\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ (il n'y a pas d'action du π_1 de la base parce que l'action de $\mathbb{Z}/p$ se prolonge en une action d'un groupe connexe).

Nous donnons deux exemples :

- Prenons $p = 2$ et $X = \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$. L'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{B}\mathbb{Z}/2)$ est la réunion disjointe de deux copies de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$. La première est munie de l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$ donc a un quotient homotopique égal au produit $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/2$ avec projection sur le premier facteur, donc la fibre en l'identité de la fibration $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, (\mathrm{B}\mathbb{Z}/2)_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/2}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{B}\mathbb{Z}/2)$ s'identifie à l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{B}\mathbb{Z}/2)$.

  La seconde est munie de l'action non triviale de $\mathbb{Z}/2$. Son quotient homotopique est l'espace $\mathrm{B}\mathbb{Z}/4$ au dessus de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$. La fibre en l'identité de $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{B}\mathbb{Z}/4) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{B}\mathbb{Z}/2)$ est vide.

- Prenons $p = 2$ et $X = \mathrm{BSU}(2)$. L'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{BSU}(2))$ est la réunion disjointe de deux copies de $\mathrm{BSU}(2)$. La première est munie de l'action triviale de $\mathbb{Z}/2$ donc la fibre en l'identité correspondante s'identifie à l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2, \mathrm{BSU}(2))$. La seconde est munie d'une action non triviale de $\mathbb{Z}/2$ dont le quotient homotopique est le classifiant du sous-groupe de $\mathrm{U}(2)$ formé des matrices de déterminant ± 1. La fibre en l'identité correspondante s'identifie au classifiant de S^1. Notons que les suites spectrales de Serre convergeant vers la cohomologie des constructions de Borel $\mathrm{BSU}(2)_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/2}$ sont en bidegrés pairs pour la première comme pour la seconde composante, donc dégénèrent au terme E_2 donc sont identiques. On en déduit que les cohomologies des constructions de Borel sont isomorphes comme $\mathbb{F}_2$-algèbres graduées au dessous de $\mathrm{H}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$, mais pas comme algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod : La première est l'algèbre polynomiale en un générateur u de degré 1 et en un générateur v de degré 4 avec une action de l'algèbre de Steenrod déterminée par la relation $\mathrm{Sq}^2 v = 0$. La seconde est la même algèbre polynomiale avec une action de l'algèbre de Steenrod déterminée par $\mathrm{Sq}^2 v = u^2 v$. Elles sont différenciées par le foncteur Fix.

Nous renvoyons à [DL] pour la démonstration de la proposition suivante :

Proposition 2.1.3. ([DL]) *Soient X un espace profini fibrant sans p-torsion et n un entier positif ; alors les espaces profinis fonctionnels* $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ *sont sans p-torsion et la suite spectrale de Serre en cohomologie modulo p continue de la fibration*

$$\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p} \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$$

dégénère au terme E_2.

La proposition ci-dessus admet la variante suivante : La suite exacte de pro-p-groupes abéliens simpliciaux $0 \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to 0$ munit le classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ d'une action de $\widehat{\mathrm{S}}^1$. Comme la fibration $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1} \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ est l'image réciproque par l'application canonique $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ de la fibration $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$, l'action de $\widehat{\mathrm{S}}^1$ sur $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ prolonge celle de $\mathbb{Z}/p$. Comme la fibration $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ est l'image réciproque par l'application $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{BB}\mathbb{Z}/p^n$ de la fibration universelle $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{EB}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BB}\mathbb{Z}/p^n$, l'action de $\widehat{\mathrm{S}}^1$ sur $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$ se prolonge elle même en une action de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ qui est l'action du groupe sur lui même par translation.

Proposition 2.1.4. *Soit X un espace profini sans p-torsion muni d'une action du pro-p-groupe abélien simplicial* $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ *pour un entier n ; alors la suite spectrale de Serre en cohomologie modulo p continue de la fibration* $X \to X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ *dégénère au terme* E_2 *et l'espace profini* $X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}$ *est sans p-torsion.*

Démonstration. On considère le diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccccc}
X & = & X & = & X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \times X & \to & X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} & \to & X_{\mathrm{hB}\mathbb{Z}/p^n} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 & \to & \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 & \to & \mathrm{BB}\mathbb{Z}/p^n
\end{array}$$

induit par la suite exacte de pro-p-groupes abéliens simpliciaux $0 \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{BB}\mathbb{Z}/p^n \to 0$. On note $(\mathrm{E}_r(X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}, \mathbb{Z}/p^k))$ la suite spectrale de Serre de la fibration $X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ en cohomologie modulo p^k continue. Le terme $\mathrm{E}_2^{s,t}$ s'identifie au produit tensoriel $\mathrm{H}^s(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, \mathbb{Z}/p^k) \otimes_{\mathbb{Z}/p^k} \mathrm{H}^t(X, \mathbb{Z}/p^k)$

($\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, \mathbb{Z}/p^k)$ est fini en chaque degré). La fibration de gauche est la projection d'un produit sur l'un des facteurs donc la suite spectrale de Serre correspondante dégénère au terme E_2. L'application $\mathrm{E}_2(X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}, \mathbb{Z}/p^k) \to \mathrm{E}_2(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1 \times X, \mathbb{Z}/p^k)$ est injective en bas degré pour k suffisamment grand car la cohomologie modulo p^k continue de X est un $\mathbb{Z}/p^k$-module plat. On en déduit que les différentielles de la suite spectrale $(\mathrm{E}_r(X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}, \mathbb{Z}/p^k))$ sont nulles en bas degré pour k assez grand. Or l'application $\mathrm{E}_2(X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}, \mathbb{Z}/p^k) \to \mathrm{E}_2(X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}, \mathbb{Z}/p)$ induite par la réduction modulo p est surjective, ce qui montre que les différentielles de la suite spectrale $(\mathrm{E}_r(X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}, \mathbb{Z}/p))$ sont nulles en bas degré donc toutes nulles. □

Remarques

- La proposition 2.1.3 se montre par récurrence sur n à l'aide de la proposition ci-dessus. Indiquons l'argument dans le cas plus simple où la cohomologie modulo p continue de X est nulle en degré impair (on s'y ramène dans le cas général) : On montre par récurrence que la cohomologie modulo p continue de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est encore nulle en degré impair. L'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}, X)$ s'identifie à l'espace des applications de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ dans $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}$ relevant l'application canonique $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$. Cette situation se reproduit algébriquement ([DL, chap 2]) : notons P la cohomologie modulo p de $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$; elle s'identifie à la partie paire de la cohomologie modulo p de $B\mathbb{Z}/p$. Le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{P} - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$, $M \mapsto \mathrm{P}\widehat{\otimes} M$ admet un adjoint à gauche Fix' et on dispose d'un isomorphisme naturel $\mathrm{Fix}(\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathrm{P}} N) \simeq \mathrm{Fix}' N$ pour tout objet N de $\mathrm{P} - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$. La cohomologie modulo p continue de la construction de Borel $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ s'identifie dans $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ au produit tensoriel $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathrm{P}} \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}$ de sorte que son image par le foncteur Fix est nulle en degré impair.

- Soit X un espace profini muni d'une action de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ pour un certain entier n. On dispose de l'application équivariante $X \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$, adjointe de l'action $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times X \to X$, et d'un retract (non équivariant) de cette application. La dégénérescence de la suite spectrale de Serre associée à X est donc conséquence de celle particulière aux espaces profinis fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$.

Corollaire 2.1.5. *Soient X', X et X'' trois espaces profinis fibrants sans p-torsion, $X' \to X$ et $X \to X''$ des combinaisons linéaires formelles* *d'applications entre espaces profinis et n un entier positif. On suppose que la suite induite de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués $\mathrm{H}^*X'' \to \mathrm{H}^*X \to \mathrm{H}^*X'$ est exacte ; alors il en est de même de la suite*

$$\mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X'') \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X) \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X') \ .$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. La dégénérescence de la suite spectrale de Serre en cohomologie modulo p continue associée à l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ au dessus de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ montre que la cohomologie modulo p continue de $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)_{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ est exacte en la cohomologie modulo p continue de X. On conclut par l'exactitude du foncteur Fix. $\square$

On obtient les mêmes informations sur la cohomologie modulo p continue de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, X)$ en passant à la limite sur n : les applications $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$ induisent un isomorphisme $\mathrm{H}^*\mathrm{BS}^1 \to \lim_n \mathrm{H}^*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$. Plus généralement on a le :

Lemme 2.1.6. ([DL, Lemme 3.7]) *Soit X un espace profini fibrant. Le morphisme*

$$\mathrm{colim}_n \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X) \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, X) \ ,$$

induit par les applications $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BS}^1$, est un isomorphisme.

Le lemme indique que l'application $\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, X) \to \lim_n \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est une équivalence d'homotopie dans $\widehat{\mathcal{S}}$, ou encore, $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^\infty$ désignant la colimite dans $\mathcal{S}$ des classifiants $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$, que l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^\infty, X)$ dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$.

Nous revenons maintenant sur la résolution libre $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BS}^1 \to \mathrm{Th}_n$ de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$.

Soit S un ensemble gradué. L'espace profini $\mathrm{K}(S)$ est un objet en groupe abélien de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$. La cofibration ${\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n}_+ \to \mathrm{BS}^1_+ \to \mathrm{Th}_n$ induit une fibration d'objets en groupe abélien de $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$

$$\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S)) \ .$$

En particulier la fibre est sans action du π_1.

PROPOSITION 2.1.7. *Soient S un ensemble gradué et n un entier positif ; lors la suite*

$$\mathbb{F}_p \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S)) \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S)) \to \mathrm{H}^*\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S)) \to \mathbb{F}_p$$

est une suite exacte d'algèbres de Hopf bicommutatives (n peut être infini).

Démonstration. La proposition est la conséquence directe de la dégénérescence de la suite spectrale de Serre en cohomologie modulo p continue associée à la fibration $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))$. Celle-ci s'obtient lorsque S est concentré en degré pair en observant que le terme E_2 de la suite spectrale est concentré en bidegré pair : Le calcul par Wilson de l'homologie des espaces MU_n montre que l'image par G d'un ensemble gradué concentré en degré pair est nulle en degré impair. On en déduit que la cohomologie modulo p continue de l'espace $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S))$ est nulle en degré impair par la proposition 1.5.4 et le fait que l'algèbre instable non unitaire $(\widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{K}(S) : \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{Th}_n)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}_-}}$ est l'image par $\widetilde{\mathrm{G}}$ d'un ensemble gradué concentré en degré pair. On vérifie enfin par récurrence sur n que la cohomologie modulo p continue de l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))$ est nulle en degré impair ([DL, théorème 3.1], cf la remarque qui suit la proposition 2.1.4).

L'application $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S))$ induit donc une surjection en cohomologie modulo p continue lorsque l'ensemble gradué S est concentré en degré pair. Soit S un ensemble gradué quelconque et écrivons $S = S_0 \cup S_1$ où S_0 est concentré en degré pair et S_1 est concentré en degré impair ; l'objet en groupe abélien $\mathrm{K}(S)$ est le produit $\mathrm{K}(S_0) \times \mathrm{K}(S_1)$ et $\mathrm{K}(S_1)$ s'identifie à l'espace de lacets de l'image par K de l'ensemble gradué obtenu en décalant les degrés des éléments de S_1 de 1. Il suffit pour obtenir la dégénérescence de la suite spectrale de Serre dans le cas général de montrer que l'application $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S_1)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S_1))$ induit encore une surjection en cohomologie modulo p continue. Or ceci vient de ce que la cohomologie modulo p continue de l'espace de lacet $\mathrm{K}(S_1)$ est primitivement engendrée par les calculs de Wilson ([WI]), donc également la cohomologie modulo p continue de l'espace profini $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S_1))$ par la proposition 1.5.4 et l'identification du terme $(\widetilde{\mathrm{G}}(S_1) : \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{Th}_n)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}_-}}$. □

2.2. Foncteurs T

On note P_n la MU-cohomologie complétée en p du classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ et P_∞ celle du classifiant BS^1. L'isomorphisme $\mathrm{colim}_n \mathrm{H}^0\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))$

$\to \mathrm{H}^0\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S))$ pour S un ensemble gradué (lemme 2.1.6) montre que l'application $\mathrm{P}_\infty \to \lim_n \mathrm{P}_n$ est un isomorphisme.

On note T_∞ le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, $M \mapsto (M : \mathrm{P}_\infty)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}$ le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}0} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}0}$, $M \mapsto ((\widetilde{M} : \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{Th}_n)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}-}})_+$. La proposition 1.5.3 et sa version réduite donne l'interprétation géométrique de l'image par T_∞ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}$ de la G-algèbre libre sur un ensemble gradué S : les morphismes $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S) \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{BS}^1, \mathrm{K}(S))$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S) \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{Th}_n, \mathrm{K}(S))$ sont des isomorphismes dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ et $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}0}$ respectivement. Observons que ce sont des isomorphismes d'objets en cogroupe abélien de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ et que l'application $\mathrm{BS}^1_+ \to \mathrm{Th}_n$ induit un morphisme d'objets en cogroupe abélien $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S) = ((\widetilde{\mathrm{G}}(S) : \mathrm{MU}^*\mathrm{BS}^1)_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}-}})_+ \to \mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S)$.

Soient n un entier positif et S un ensemble gradué ; on note $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S)$ la MU-cohomologie de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))$. Cette notation est justifiée par le fait que tout morphisme $\mathrm{G}(S) \to \mathrm{G}(S')$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ est induit par un unique morphisme $\mathrm{K}(S') \to \mathrm{K}(S)$ dans $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}$ donc induit un morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S) \to \mathrm{T}_n\mathrm{G}(S')$.

La proposition suivante interprète l'algèbre instable $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S)$ comme objet en cogroupe abélien de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$:

Proposition 2.2.1. *Soient n un entier et S un ensemble gradué.*

(a) *Le morphisme d'objets en cogroupe abélien $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S) \to \mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S)$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ est un morphisme surjectif dans $\widehat{\mathcal{L}}$; en particulier son noyau existe et la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente au noyau est dans $\widehat{\mathcal{L}}$.*

(b) *Le morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S) \to \mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S)$ induit par l'application $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BS}^1$ et l'interprétation géométrique de $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S)$ identifie $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S)$ au noyau du morphisme $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S) \to \mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S)$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S)$ au conoyau du morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S) \to \mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S)$ (comme objets en cogroupe abélien).*

Démonstration. Notons C et C' les objets en cogroupe abélien $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S)$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S)$. Le morphisme $C \to C'$ munit C d'une coaction de C' d'où on déduit un résolution cosimpliciale canonique $C\widehat{\otimes}C' \leftrightarrows\!\!\!\rightrightarrows C\widehat{\otimes}C'\widehat{\otimes}C' \to \cdots$ de C par des objets colibres. Notons K l'égalisateur dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ du 1-cocomplexe $C \leftrightarrows\!\!\!\rightrightarrows C\widehat{\otimes}C'$ donné par la coaction de C' sur C et le morphisme $(\mathrm{Id}, \mathrm{MU}^* \to C') : C \to C\widehat{\otimes}C'$; la résolution cosimpliciale canonique de C induit un objet cosimplicial coaugmenté $K \to C \leftrightarrows\!\!\!\rightrightarrows C\widehat{\otimes}C' \to \cdots$. La proposition 2.1.7 montre que l'algèbre instable C/f^1 est colibre pour la coaction de C'/f^1. On en déduit que le cocomplexe de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels gradués associé à l'objet cosimplicial $C/\mathrm{f}^1 \leftrightarrows C/\mathrm{f}^1 \otimes C'/\mathrm{f}^1 \to \cdots$ a son homologie concentré en degré 0 puis qu'il en est de même du cocomplexe de $\widehat{\mathcal{M}}$ associé à l'objet cosimplicial $C \leftrightarrows C\widehat{\otimes}C' \to \cdots$ par la proposition 1.4.1.5 et en particulier que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente à K est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Le produit tensoriel terme à terme de la résolution cosimpliciale $K/f^1 \to C/\mathrm{f}^1 \leftrightarrows C'/\mathrm{f}^1 \to \cdots$ par elle même est une résolution cosimpliciale. On en déduit toujours en invoquant la proposition 1.4.1.5 que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente à $K\widehat{\otimes}K$ est égalisatrice du 1-cocomplexe $C\widehat{\otimes}C \leftrightarrows (C\widehat{\otimes}C')\widehat{\otimes}(C\widehat{\otimes}C')$ donc que les structures de cogroupe abélien sur C et C' induisent une structure de cogroupe abélien sur K. l'algèbre instable K munie de cette structure est alors le noyau du morphisme d'objets en cogroupe abélien $C \to C'$. Enfin le morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S) \to C$ se factorise en un morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S) \to K$ lequel est un isomorphisme modulo f^1 par la proposition 2.1.7 donc est un isomorphisme puisque chacun des objets est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ (corollaire 1.2.1.4).

Dualement le morphisme d'algèbres instables $K \to C$ munit C d'une action de K. Le fait que C' soit le quotient de C pour cette action se montre par les mêmes techniques que précédemment en invoquant cette fois la proposition 1.4.1.3. $\square$

On étend formellement T_n en un endofoncteur de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ en définissant, pour tout $M \in \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, T_nM comme le coégalisateur du 1-complexe $\mathrm{T}_n\mathrm{G}^2(M) \leftrightarrows \mathrm{T}_n\mathrm{G}(M)$ induit par le 1-complexe $\mathrm{G}^2M \leftrightarrows \mathrm{G}(M)$.

LEMME 2.2.2. *Le foncteur* T_n *commute aux colimites dans* $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

Démonstration. Le foncteur T_n commute aux coégalisateurs de 1-complexes par construction. Il suffit donc pour obtenir le lemme de montrer que l'image par T_n de la G-algèbre libre sur la colimite d'un diagramme (S_α) d'ensembles gradués est la colimite dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ du diagramme $(\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S_\alpha))$ et on peut se limiter aux diagrammes finis sans flèches (dont la colimite est la somme) et aux diagrammes filtrants. Les foncteurs T_∞ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}$ commutent aux colimites par adjonction. Le lemme 1.3.4 montre alors que les foncteurs $S \mapsto (\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1$ et $S \mapsto (\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1$ commutent aux colimites filtrantes Le fait que pour tout ensemble gradué S la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente à $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S)$ est libre et que $(\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1$ est l'égalisateur du 1-cocomplexe $(\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S)) \leftrightarrows (\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1 \otimes (\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1$ montre que le foncteur $\mathcal{E}$ns-gr $\to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, $S \mapsto \mathrm{T}_n\mathrm{G}(S)$ commute aux sommes. L'exactitude des colimites filtrantes et leur commutation au produit tensoriel dans $\mathcal{E}$ montre de plus que le foncteur $\mathcal{E}$ns-gr $\to \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$, $S \mapsto (\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1$ commute aux colimites filtrantes. Soit alors (S_α) un diagramme filtrant d'ensembles gradués, le morphisme $\mathrm{colim}_\alpha \mathrm{T}_n \mathrm{G}(S_\alpha) \to \mathrm{T}_n \mathrm{G}(\mathrm{colim}_\alpha S_\alpha)$ est un isomorphisme modulo f^1 par le lemme 1.3.4 donc un isomorphisme car chacune des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres sous-jacentes est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ (la première par le lemme 1.4.1.4). $\square$

L'évaluation $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S)) \to \mathrm{K}(S)$ induit un morphisme $\mathrm{G}(S) \to \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} \mathrm{T}_n \mathrm{G}(S)$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ (on utilise la proposition 1.4.3.6). On en déduit pour toute MU-algèbre instable M un morphisme $M \to \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} \mathrm{T}_n M$, d'où une application

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{T}_n M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} N)\ .$$

Proposition 2.2.3. *Pour toute* MU-*algèbre instable M, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{T}_n M, \widehat{\mathrm{MU}^*}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{P}_n)$$

est une bijection.

Démonstration. Il suffit de démontrer la proposition lorsque M est la G-algèbre libre sur un ensemble gradué S, le cas général s'en déduisant en utilisant le début de la G-résolution canonique de M. Le cas $M = \mathrm{G}(S)$ vient de la définition de $\mathrm{T}_n \mathrm{G}(S)$, du corollaire 1.3.7 et de la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S)) \simeq \mathbf{hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{G}(S), \mathrm{P}_n)$. $\square$

Remarque. On dispose encore d'une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{T}_\infty M, \widehat{\mathrm{MU}^*}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{P}_\infty)$ donnée par l'adjonction définissant T_∞. Nous n'avons pas une telle adjonction pour le foncteur T_n : nous ne savons pas que l'application (1) est bijective (bien qu'elle admette une section, voir (2)).

Considérons le cas $n = 1$: le morphisme $M \to \mathrm{P}_1 \widehat{\otimes} \mathrm{T}_1 M$ induit également un morphisme $M/\mathrm{f}^1 \to (\mathrm{P}_1)/\mathrm{f}^1 \widehat{\otimes} (\mathrm{T}_1 M)/\mathrm{f}^1$ de $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ donc, l'algèbre instable $(\mathrm{P}_1)/\mathrm{f}^1$ s'identifiant à la partie paire de la cohomologie modulo p de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$, un morphisme $\mathrm{T}(M/\mathrm{f}^1) \to (\mathrm{T}_1 M)/\mathrm{f}^1$.

Proposition 2.2.4. *Pour toute* MU-*algèbre instable M, le morphisme $\mathrm{T}(M/\mathrm{f}^1) \to (\mathrm{T}_1 M)/\mathrm{f}^1$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Il suffit à nouveau de montrer la proposition pour $M = \mathrm{G}(S)$; or ce cas vient à nouveau de la définition de $\mathrm{T}_1 \mathrm{G}(S)$ et du fait que l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, \mathrm{K}(S))$ est sans p-torsion. $\square$

Corollaire 2.2.5. *Soit M une* MU-*algèbre instable dont la* $\widehat{\mathrm{L}}$-*algèbre sous-jacente est libre ; alors il en est de même de* $\mathrm{T}_1 M$

Démonstration. Observons d'abord que si M est une G-algèbre libre alors $\mathrm{T}_1 M$ est la MU-cohomologie d'une espace profini sans p-torsion (proposition 2.1.3) donc est libre comme $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre. Pour M général la proposition 1.4.1.3 montre que la $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable simpliciale augmentée $\mathrm{G}_\bullet(M)/\mathrm{f}^1 \to M/\mathrm{f}^1$ est une résolution de M/f^1. On en déduit par exactitude du foncteur T et par la proposition 2.2.4 que la $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable simpliciale augmentée $(\mathrm{T}_1\mathrm{G}_\bullet(M))/\mathrm{f}^1 \to (\mathrm{T}_1 M)/\mathrm{f}^1$ est une résolution de $(\mathrm{T}_1 M)/\mathrm{f}^1$, donc en invoquant à nouveau la proposition 1.4.1.3 que $\mathrm{T}_1 M$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. $\square$

L'application $\mathrm{K}(S) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))$, adjointe de la projection sur le second facteur $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times \mathrm{K}(S) \to \mathrm{K}(S)$, induit un morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{G}(S) \to \mathrm{G}(S)$. On en déduit un morphisme $\mathrm{T}_n M \to M$ pour toute MU-algèbre instable M. Soit N une MU-algèbre instable ; le morphisme $\mathrm{T}_n(\mathrm{P}_n\widehat{\otimes}N) \to N$, produit tensoriel du morphisme $\mathrm{T}_n\mathrm{P}_n \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$ adjoint par la proposition 2.2.3 de l'identité de P_n, et du morphisme $\mathrm{T}_n N \to N$ défini ci-dessus, induit par composition et fonctorialité de T_n une application

(2) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{P}_n\widehat{\otimes}N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{T}_n M, N) \ .$$

En particulier, pour tout entier $m \geq n$ éventuellement infini, la composée $M \to \mathrm{P}_m\widehat{\otimes}\mathrm{T}_m M \to \mathrm{P}_n\widehat{\otimes}\mathrm{T}_m M$ induit un morphisme $\mathrm{T}_n M \to \mathrm{T}_m M$. Le lemme suivant est une version algébrique du lemme 2.1.6 :

LEMME 2.2.6. *Pour toute* MU-*algèbre instable M, le morphisme* colim_n $\mathrm{T}_n M \to \mathrm{T}_\infty M$ *est un isomorphisme de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$; en particulier le morphisme* $\mathrm{colim}_n(\mathrm{T}_n M)/\mathrm{f}^1 \to (\mathrm{T}_\infty M)/\mathrm{f}^1$ *est un isomorphisme dans $\mathcal{K}_{\mathrm{H}}$ ou $\mathcal{E}$.*

Démonstration. La seconde partie du lemme se déduit de la première à l'aide du lemme 1.3.4. Pour la première partie, il suffit de considérer le cas où M est la G-algèbre libre sur un ensemble gradué S ; or ce cas est conséquence de l'interprétation géométrique de $\mathrm{T}_\infty\mathrm{G}(S)$ et du lemme 2.1.6. On peut également utiliser le lemme 2.2.1 en observant que l'algèbre instable $\mathrm{colim}_n\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{G}(S)$ est nulle (par adjonction). $\square$

Pour tout entier n, la structure d'objet en groupe abélien du classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ induit une structure naturelle d'objet en cogroupe abélien sur l'algèbre instable P_n. On dispose de la suite d'objets en cogroupe abélien $\cdots \to \mathrm{P}_{n+1} \to \mathrm{P}_n \to \cdots$ dont P_∞ est la limite.

Soit M une MU-algèbre instable ; la composée du morphisme $M \to \mathrm{P}_n\widehat{\otimes}\mathrm{T}_n M$ avec le morphisme $\mathrm{P}_n\widehat{\otimes}\mathrm{T}_n M \to \mathrm{P}_n\widehat{\otimes}\mathrm{P}_n\widehat{\otimes}\mathrm{T}_n M$ donné par le coproduit de P_n induit une coaction de P_n sur $\mathrm{T}_n M$ via l'application (2), qui coïncide avec la coaction induite en MU-cohomologie continue par l'action de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ sur l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))$ lorsque M est la G-algèbre libre sur un ensemble gradué S.

On note $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ la catégorie des MU-algèbres instables au dessous de P_∞ (un objet de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ est une MU-algèbre instable M munie d'un morphisme $\mathrm{P}_\infty \to M$; un morphisme entre deux objets M et N de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ est un morphisme dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ dont la composée avec $\mathrm{P}_\infty \to M$ est le morphisme $\mathrm{P}_\infty \to N$). Le coégalisateur dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ d'un 1-complexe de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ hérite d'un morphisme de source P_∞ qui en fait le coégalisateur du 1-complexe dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. On en déduit l'existence de toutes les colimites dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ (voir la description de la colimite d'un diagramme d'algèbres sur une monade). On note en particulier $M \widehat{\otimes}_{\mathrm{P}_\infty} N$ la somme de deux P_∞-algèbres M et N. Pour M dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ et N dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, le produit tensoriel $M \widehat{\otimes} N$ muni de la composée $\mathrm{P}_\infty \to M \to M \widehat{\otimes} N$ s'identifie à la somme de M et de la P_∞-algèbre libre $\mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} N$ dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

Soit M une MU-algèbre instable munie d'une coaction de P_n et dont la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente est dans $\widehat{\mathcal{L}}$; on définit l'objet $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ de la façon suivante :

– Si M est l'objet colibre $\mathrm{P}_n \widehat{\otimes} M'$ pour une certaine algèbre instable M', $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ est l'algèbre instable sous-jacente au P_∞-comodule colibre $\mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} M'$ munie du morphisme $(p^n)^* \widehat{\otimes} (\widehat{\mathrm{MU}}^* \to M') : \mathrm{P}_\infty \to \mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} M'$, où $(p^n)^*$ est le morphisme induit par l'élévation à la puissance p^n, $\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \widehat{\mathrm{S}}^1$. Le morphisme d'objets en cogroupe abélien $\mathrm{P}_\infty \to \mathrm{P}_n$ fait de la P_∞-algèbre $\mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} M'$ un foncteur en l'objet avec coaction $\mathrm{P}_n \widehat{\otimes} M'$.

– Pour M quelconque, on définit $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ comme l'égalisateur dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ du 1-cocomplexe $(\mathrm{P}_n \widehat{\otimes} M)_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \leftrightarrows (\mathrm{P}_n^{\widehat{\otimes} 2} \widehat{\otimes} M)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ induit par le début de la résolution colibre canonique de M ; c'est un foncteur en M. (La MU-algèbre instable sous-jacente à $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ est donc le produit cotensoriel de M et de P_∞ au dessous de P_n.)

Soit maintenant X un espace profini muni d'une action du classifiant $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ et tel que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{P}_n, \mathrm{MU}^* X)$ est nulle. L'action de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ sur X induit une coaction de P_n sur $\mathrm{MU}^* X$ et le 1-complexe $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times X \leftrightarrows \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times X \to X$ induit un morphisme $\mathrm{MU}^* X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to (\mathrm{MU}^* X)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$.

Proposition 2.2.7.

(a) *Soit M une* MU*-algèbre instable munie d'une coaction de* P_n *dont la*

$\widehat{\mathrm{L}}$-*algèbre sous-jacente est dans* $\widehat{\mathcal{L}}$ *; alors la* $\widehat{\mathrm{L}}$-*algèbre sous-jacente à* $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ *est dans* $\widehat{\mathcal{L}}$ *et* $(M_{\widehat{\mathrm{S}}^1})/\mathrm{f}^1$ *est exact en* M/f^1.

(b) *Soit* X *un espace profini sans* p-*torsion muni d'une action de* $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ *; alors le morphisme* $\mathrm{MU}^*X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to (\mathrm{MU}^*X)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ *est un isomorphisme dans* $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

Démonstration. Le point (a) de la proposition est conséquence du lemme suivant :

Soient M une $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre et s un entier ; on note $\mathrm{H}^s(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, M)$ le s-ième groupe de cohomologie ordinaire de $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ à coefficients dans le groupe abélien gradué M. La structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre de M induit une structure de $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sur $\mathrm{H}^s(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, M)$.

LEMME 2.2.8. *Soit* M *une* MU-*algèbre instable avec coaction de* P_n *telle que la* $\widehat{\mathrm{L}}$-*algèbre sous-jacente est libre ; alors la* $\widehat{\mathrm{L}}$-*algèbre sous-jacente à* $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ *possède une filtration naturelle complète* $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1} = \mathrm{I}^0 M_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \supset \mathrm{I}^1 M_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \supset \cdots$ *dont l'objet gradué associé est isomorphe à* $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, M)$ *comme* $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, \widehat{\mathrm{MU}^*})$-*algèbre.*

Démonstration. Soit k un entier positif ; on commence par établir de façon naïve la filtration de la MU-cohomologie complétée en p de la construction de Borel $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times (\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n)^k)_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}$ pour l'action de $\widehat{\mathrm{S}}^1$ sur le premier facteur.

La dégénérescence de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch aboutissant à la MU-cohomologie complétée en p de l'espace $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ montre que la filtration squelettale de $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ induit une filtration de sa MU-cohomologie complétée en p dont le gradué s'identifie à la $\widehat{\mathrm{MU}^*}$-algèbre graduée $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, \widehat{\mathrm{MU}^*})$. La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch-Serre en MU-cohomologie complétée en p associée à la fibration $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times (\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n)^k)_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ est isomorphe au produit tensoriel des suites spectrales pour les fibrations $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n)_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ et $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n)^k \to \mathrm{pt}$ par la formule de Künneth (proposition 1.4.3.6). Le terme E_2 de la première s'identifie à la cohomologie de $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ à coefficients dans la MU-cohomologie complétée en p de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ donc est concentré en degré pair donc les suites spectrales associées à la première fibration et au produit des fibrations dégénèrent au terme E_2 ; en particulier elles convergent. On en déduit une filtration naturelle de la P_∞-algèbre $(\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k}$ compatible avec le coproduit $\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} \mathrm{P}_n$ et dont le gradué est isomorphe à la cohomologie de $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ à coefficients dans le produit tensoriel $\mathrm{P}_n \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k}$ comme $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, \widehat{\mathrm{MU}^*})$-algèbre. On obtient en particulier pour chaque entier $s \geq 0$

une suite $0 \to \Sigma^s \mathrm{P}_n \to (\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^{s+1} \to (\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s \to 0$ exacte dans $\widehat{\mathcal{M}}$, où $\Sigma^s \mathrm{P}_n$ désigne le produit tensoriel de P_n par le $\widehat{\mathrm{MU}}^*$-module libre en un générateur de degré s. La suite exacte montre que pour tout entier t la tour des quotients $((\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s)/\mathrm{F}^t$ est stationnaire en s. La limite de cette tour est le quotient $(\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{F}^t$ (on le vérifie en construisant la tour des résolutions des $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbres $(\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s$ issue de la résolution libre de P_n (lemme 1.4.1.7)).

On vérifie par récurrence sur s et en utilisant la proposition 1.4.3.6 que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}((\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s, (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L)$ est nulle pour tout entier k et toute objet L de $\widehat{\mathcal{L}}$, de sorte qu'on obtient une suite exacte $0 \to \Sigma^s \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L$ $\to (\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^{s+1} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L \to (\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L \to 0$. Autrement dit la filtration de $(\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ induit une filtration de $(\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L$ dont le gradué s'identifie à la $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, \widehat{\mathrm{MU}}^*)$-algèbre $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1, (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L)$. Nous montrons maintenant que cette filtration est complète.

Notons $P_{s,t}$ la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $((\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s)/\mathrm{F}^t$. On déduit de l'annulation du terme $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(P_{s,t}, \mathrm{P}_n)$ que la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{\mathcal{L}}}(P_{s,t}, (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L)$ est nulle (cf la démonstration du corollaire 1.4.3.6). On en déduit par le corollaire 1.4.1.25 que pour tout entier s éventuellement infini l'application $P_{s,\infty} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L$ $\to \lim_t (P_{s,t} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L)$ est un isomorphisme, donc par commutation des limites que l'application $P_{\infty,\infty} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L \to \lim_s (P_{s,\infty} \widehat{\otimes} (\mathrm{P}_n)^{\widehat{\otimes} k} \widehat{\otimes} L)$ est un isomorphisme.

Soit maintenant M une MU-algèbre instable avec coaction de P_n dont la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Par définition l'algèbre instable $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ au dessus de P_∞ est le π^0 de l'objet cosimplicial $(\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \widehat{\otimes} M \leftrightarrows (\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \widehat{\otimes} \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} M$ $\to \cdots$, image par le foncteur $(-)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ de la résolution cosimpliciale colibre canonique de M. On obtient par récurrence sur s et avec ce qui précède que le cocomplexe de $\widehat{\mathcal{M}}$ associé à l'objet cosimplicial $((\mathrm{P}_n)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s \widehat{\otimes} \mathrm{P}_n^k \widehat{\otimes} M)_k$ a son homologie concentrée en degré 0 de sorte qu'on obtient une filtration de $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ dont le gradué est celui anoncé. La commutation des limites entre elles montre que cette filtration est complète. $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit M une MU-algèbre instable avec coaction de P_n dont la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Une récurrence sur s et la proposition 1.2.1.3 montrent que chaque quotient $M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s$ est dans $\widehat{\mathcal{L}}$ et que $(M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s)/\mathrm{f}^1$ est exact en M/f^1. La suite exacte $0 \to \Sigma^s M \to (M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^{s+1}) \to (M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s) \to 0$ montre de plus que la tour $((M_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{I}^s)/\mathrm{f}^1)_s$ est en chaque degré stationnaire en s. Le point (a) se déduit alors du lemme 1.2.1.12

Soit X un espace profini sans p-torsion muni d'une action de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$. La proposition 2.1.4 indique que la suite spectrale de Serre en cohomologie modulo p continue associée à la fibration $X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ dégénère au terme E_2. On vérifie facilement que la filtration de $\mathrm{H}^*X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}$ induite par la filtration squelettale de $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{S}}^1$ s'identifie avec celle de $(\mathrm{MU}^*X)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}/\mathrm{f}^1$ induite par la filtration de $(\mathrm{MU}^*X)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$. L'application $\mathrm{MU}^*X_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1} \to (\mathrm{MU}^*X)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ induit donc un isomorphisme modulo f^1 donc est un isomorphisme puisque les deux termes sont dans $\widehat{\mathcal{L}}$. $\square$

Soit M une MU-algèbre instable dont l'image par T_n est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. La proposition qui précède montre que $(\mathrm{T}_nM)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ est le coégalisateur dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ du 1-complexe

$(\mathrm{T}_n\mathrm{G}^2(M))_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \leftrightarrows (\mathrm{T}_n\mathrm{G}(M))_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ induit par le début de la G-résolution libre de M. On définit alors, pour M quelconque, $(\mathrm{T}_nM)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$ comme le coégalisateur du 1-complexe

$(\mathrm{T}_n\mathrm{G}^2(M))_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \leftrightarrows (\mathrm{T}_n\mathrm{G}(M))_{\widehat{\mathrm{S}}^1}$.

Soit M un objet de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$; on définit la MU-algèbre instable $\mathrm{Fix}_1(M)$ de la façon suivante :

– Si M est la P_∞-algèbre libre $\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M'$ pour une certaine algèbre instable M', on pose $\mathrm{Fix}_1(M) = \mathrm{T}_1M'$. Pour tout morphisme $\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M' \to \mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}N'$ de P_∞-algèbres, on définit le morphisme $\mathrm{Fix}_1(\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M') \to \mathrm{Fix}_1(\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}N')$ comme la composée du morphisme $\mathrm{T}_1M' \to \mathrm{T}_1(\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}N')$, image par T_1 de la restriction à M du morphisme $\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M' \to \mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}N'$, avec le morphisme $\varphi\widehat{\otimes}\mathrm{Id}_{\mathrm{T}_1N'} : \mathrm{T}_1(\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}N') \to \mathrm{T}_1N'$, où φ est le morphisme $\mathrm{T}_1\mathrm{P}_\infty \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$ adjoint (par la proposition 2.2.3) du morphisme canonique $\mathrm{P}_\infty \to \mathrm{P}_1$.

– Pour M quelconque, on définit Fix_1M comme le coégalisateur du 1-complexe

$$\mathrm{Fix}_1(\mathrm{P}_\infty^{\widehat{\otimes}2}\widehat{\otimes}M) \leftrightarrows \mathrm{Fix}_1(\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M)$$

induit par le début de la résolution libre canonique de M ; c'est un foncteur en M.

La définition du foncteur Fix_1 et le lemme 2.2.2 impliquent :

Lemme 2.2.9. *Le foncteur* $\mathrm{Fix}_1 : \mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \to \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ *commute aux colimites.*

Le morphisme naturel $\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M \to \mathrm{P}_1\widehat{\otimes}\mathrm{T}_1(\mathrm{P}_\infty\widehat{\otimes}M)$ induit un morphisme $M \to \mathrm{P}_1\widehat{\otimes}\mathrm{Fix}_1M$ de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, où $\mathrm{P}_1\widehat{\otimes}\mathrm{Fix}_1M$ est la P_∞-algèbre donnée par la composée $\mathrm{P}_\infty \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_1\widehat{\otimes}\mathrm{Fix}_1M$.

PROPOSITION 2.2.10. *Pour tout objet M de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$, le morphisme $M \to \mathrm{P}_1 \widehat{\otimes} \mathrm{Fix}_1 M$ induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{Fix}_1 M, \mathrm{MU}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{P}_1)\ .$$

Démonstration. On se ramène au cas où M est libre comme P_∞-algèbre, le cas général s'en déduisant en utilisant le début de la résolution libre canonique de M. Pour $M = \mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} N$, le résultat est conséquence de la proposition 2.2.3 et de la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} N, \mathrm{P}_1) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(N, \mathrm{P}_1)$. $\square$

On note P la $\mathrm{H}\mathbb{Z}/p$-algèbre instable $\mathrm{P}_1/\mathrm{f}^1$. Rappelons que le foncteur $\mathcal{K}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{P} - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$, $M \mapsto \mathrm{P} \widehat{\otimes} M$ admet un adjoint à gauche Fix' et qu'on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Fix}(\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathrm{P}} N) \simeq \mathrm{Fix}' N$ pour tout objet N de $\mathrm{P} - \mathcal{K}_{\mathrm{H}}$. Le morphisme $M \to \mathrm{P}_1 \widehat{\otimes} \mathrm{Fix}_1 M$ induit donc un morphisme $\mathrm{Fix}'(M/\mathrm{f}^1) \to (\mathrm{Fix}_1 M)/\mathrm{f}^1$.

PROPOSITION 2.2.11. *Pour tout objet M de $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ le morphisme $\mathrm{Fix}'(M/\mathrm{f}^1) \to (\mathrm{Fix}_1 M)/\mathrm{f}^1$ est un isomorphisme.*

Démonstration A nouveau on se ramène au cas où M est libre comme P_∞-algèbre ; or pour $M = \mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} N$ la proposition vient des isomorphismes $\mathrm{Fix}'(\mathrm{P}_\infty/\mathrm{f}^1 \otimes N/\mathrm{f}^1) \simeq \mathrm{T}(N/\mathrm{f}^1)$, $\mathrm{Fix}_1(\mathrm{P}_\infty \widehat{\otimes} N) = \mathrm{T}_1 N$ et de la proposition 2.2.4. $\square$

COROLLAIRE 2.2.12. *Soit M une P_∞-algèbre dont la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente est libre ; alors la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente à $\mathrm{Fix}_1 M$ est libre.*

Démonstration Le corollaire est une traduction du corollaire 2.2.5 lorsque M est une P_∞-algèbre libre. On conclut dans le cas général par le même raisonnement que celui utilisé pour démontrer le corollaire 2.2.5 en utilisant cette fois la P_∞-résolution libre de M et l'exactitude de $(\mathrm{Fix}_1 M)/\mathrm{f}^1$ en M/f^1. $\square$

Pour M une MU-algèbre instable avec coaction de P_{n+1}, $n \geq 1$, on note M' l'algèbre instable M munie de la coaction de P_n induite par le morphisme d'objets en cogroupe abélien $\mathrm{P}_{n+1} \to \mathrm{P}_n$. Le morphisme $M \to \mathrm{P}_{n+1} \widehat{\otimes} M$ induit un morphisme $(M')_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \to (\mathrm{P}'_{n+1})_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \widehat{\otimes} M$ dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$. Le cas que nous avons en vue est le morphisme $\mathrm{T}_n N \to (\mathrm{T}_{n+1} N)'$ induit par la composée $N \to \mathrm{P}_{n+1} \widehat{\otimes} \mathrm{T}_{n+1} N \to \mathrm{P}_n \widehat{\otimes} \mathrm{T}_{n+1} N$, $N \in \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$.

On dispose d'un morphisme canonique $(\mathrm{P}'_{n+1})_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{P}_1$ de P_∞-algèbres, construit comme suit :

On dispose pour tout entier $k \geq 1$ d'une suite exacte de p-groupes abéliens finis simpliciaux $0 \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{k+1} \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^k \to 0$. La suite exacte $0 \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^k \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{k+1} \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \to 0$ induit en passant à la limite sur k une suite exacte de pro-p-groupes abéliens simpliciaux $0 \to \widehat{\mathrm{S}}^1 \to \widehat{\mathrm{S}}^1 \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \to 0$. Le morphisme $\widehat{\mathrm{S}}^1 \to \widehat{\mathrm{S}}^1$ induit par composition avec le morphisme canonique $\widehat{\mathrm{S}}^1 = \lim_k \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^k \to \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$ une action de $\widehat{\mathrm{S}}^1$ sur $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$. On dispose donc d'un morphisme (de pro-p-groupes abéliens simpliciaux) de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ dans le quotient homotopique de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}$ pour cette action ; il induit en MU-cohomologie complétée en p (où de façon équivalente en MU-cohomologie continue pour la structure profinie) un morphisme $(\mathrm{P}'_{n+1})_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{P}_1$.

A toute paire de morphismes $U \to Q \widehat{\otimes}_{\mathrm{P}_\infty} V$ et $Q \to \mathrm{P}_1$ dans $\mathrm{P}_\infty - \mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ on associe la composée $\mathrm{Fix}_1 U \to \mathrm{Fix}_1 Q \widehat{\otimes} \mathrm{Fix}_1 V \to \mathrm{Fix}_1 V$. On associe en particulier à la MU-algèbre instable M avec coaction de P_{n+1} et au morphisme canonique $(\mathrm{P}'_{n+1})_{\widehat{\mathrm{S}}^1} \to \mathrm{P}_1$ un morphisme $\mathrm{Fix}_1((M')_{\widehat{\mathrm{S}}^1}) \to \mathrm{T}_1 M$.

Proposition 2.2.13. *Soit M une* MU-*algèbre instable et n un entier strictement positif ; alors la composée*

$$\mathrm{Fix}_1((\mathrm{T}_n M)_{\widehat{\mathrm{S}}^1}) \to \mathrm{Fix}_1((\mathrm{T}_{n+1} M)'_{\widehat{\mathrm{S}}^1}) \to \mathrm{T}_1 \mathrm{T}_{n+1} M \to \mathrm{T}_{n+1} M$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Lorsque M est la G-algèbre libre sur un ensemble gradué S, on dispose des isomorphismes canoniques $(\mathrm{Fix}_1((\mathrm{T}_n \mathrm{G}(S))_{\widehat{\mathrm{S}}^1}))/\mathrm{f}^1 \simeq \mathrm{Fix}'\mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{K}(S))_{\mathrm{h}\widehat{\mathrm{S}}^1}$ et $(\mathrm{T}_{n+1}\mathrm{G}(S))/\mathrm{f}^1 \simeq \mathrm{H}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n+1}, \mathrm{K}(S))$ de sorte que l'application $\mathrm{Fix}_1((\mathrm{T}_n \mathrm{G}(S))_{\widehat{\mathrm{S}}^1}) \to \mathrm{T}_{n+1}\mathrm{G}(S)$ est un isomorphisme modulo f^1 donc un isomorphisme puisque chacun des termes est dans $\widehat{\mathcal{L}}$. Le cas général s'en déduit en utilisant le début de la G-résolution libre de M. $\square$

Propriétés d'exactitude des foncteurs T_n

Notons $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ formée des algèbres instables dont la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente est dans $\widehat{\mathcal{L}}$; elle coïncide avec la catégorie des G'-algèbres de $\widehat{\mathcal{L}}$.

Proposition 2.2.14. *Pour tout entier n (éventuellement infini) la restriction du foncteur T_n à $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$ est un endofoncteur de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$ et le foncteur associé $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}} \to \mathcal{E}$, $M \mapsto (\mathrm{T}_n M)/\mathrm{f}^1$ est exact en M/f^1.*

Démonstration. La propositions se montre par récurrence en utilisant les corollaires 2.2.5 et 2.2.12 et la proposition 2.2.13. Le cas $n = \infty$ s'obtient en passant à la colimite sur n (lemme 2.2.6) : le lemme 1.4.1.4 montre que si la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre sous-jacente à M est libre, il en est de même de $\mathrm{T}_\infty M$; le lemme 1.3.4 et l'exactitude des colimites filtrantes dans $\mathcal{E}$ montrent que $(\mathrm{T}_\infty M)/\mathrm{f}^1$ est exact en M/f^1. □

Remarque. La proposition 2.1.7 montre que pour toute G-algèbre libre M la $\widehat{\mathrm{L}}$-algèbre $(T_\infty M)/\mathrm{f}^1$ est libre pour l'action de $(\mathrm{T}_n M)/\mathrm{f}^1$. Nous ne savons pas si ce résultat s'étend à tout objet M de $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$; si c'est le cas l'objet simplicial augmenté $\cdots \to (\mathrm{T}_n M)/\mathrm{f}^1 \widehat{\otimes} (\mathrm{T}_\infty M)/\mathrm{f}^1 \overset{\leftarrow}{\rightrightarrows} (\mathrm{T}_\infty M)/\mathrm{f}^1 \to (\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n} M)/\mathrm{f}^1$, induit par la résolution simpliciale canonique de $(\mathrm{T}_\infty M)/\mathrm{f}^1$ comme $(\mathrm{T}_n M)/\mathrm{f}^1$-algèbre, est une résolution de $(\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n} M)/\mathrm{f}^1$ et on en déduit que le foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n} M$ vérifie également les propriétés énoncées dans la proposition pour T_n.

2.3. Cohomologie des espaces fonctionnels de source le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif

THÉORÈME 2.3.1. *Soient n un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et X un espace profini fibrant sans p-torsion ; alors le morphisme*

$$\mathrm{T}_n \mathrm{MU}^* X \to \mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X) ,$$

induit par l'évaluation $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \times \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X) \to X$, est un isomorphisme.

Démonstration. Le théorème est vrai par définition lorsque X est l'espace profini $\mathrm{K}(S)$ pour un ensemble gradué S. Observons ensuite que les termes $\mathrm{T}_n \mathrm{MU}^* X$ et $\mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ sont dans $\widehat{\mathcal{L}}$ lorsque X est sans p-torsion, le premier par la proposition 2.2.14, le second parce que l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est sans p-torsion (proposition 2.1.3). Les algèbres instables $(\mathrm{T}_n \mathrm{MU}^* X)/\mathrm{f}^1$ et $\mathrm{H}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ sont coégalisatrices des 1-complexes induits par le début de la MU-résolution cosimpliciale canonique de X, la première par exactitude à droite des foncteurs T_n et $(-)/\mathrm{f}^1$, la seconde par le corollaire 2.1.5. On en déduit que le morphisme $\mathrm{T}_n \mathrm{MU}^* X \to \mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est un isomorphisme modulo f^1 donc est un isomorphisme. □

On obtient par itération le

Corollaire 2.3.2. *Soient* $(n_1, \ldots, n_k)$ *une suite finie d'éléments de* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *et* X *un espace profini fibrant sans* p*-torsion ; alors l'espace profini* $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_1} \times \cdots \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_k}, X)$ *est sans* p*-torsion et le morphisme naturel*

$$\mathrm{T}_{n_1} \cdots \mathrm{T}_{n_k} \mathrm{MU}^* X \to \mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_1} \times \cdots \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_k}, X)$$

est un isomorphisme.

Corollaire 2.3.3. *Soient* $(n_1, \ldots, n_k)$ *une suite finie d'éléments de* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *et* M *une* MU*-algèbre instable ; alors l'application (1) induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{T}_{n_1} \cdots \mathrm{T}_{n_k} M, \widehat{\mathrm{MU}^*}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(M, \mathrm{P}_{n_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \mathrm{P}_{n_k}) \ .$$

Démonstration. Il suffit de montrer le corollaire lorsque M est une G-algèbre libre, le cas général s'en déduisant par passage aux coégalisateurs. Pour $M = \mathrm{G}(S)$, le corollaire est conséquence du corollaire précédent, du corollaire 1.3.7 et de la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_1} \times \cdots \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_k}, \mathrm{K}(S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{G}(S), \mathrm{P}_{n_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \mathrm{P}_{n_k})$. $\square$

Le corollaire suivant est une reformulation de la proposition 7.17 de [DL] et est conséquence des deux corollaires précédents et du corollaire 1.3.7.

Corollaire 2.3.4. *Soient* π *un groupe de Lie compact commutatif et* X *un espace sans* p *torsion ; alors l'application*

$$[\mathrm{B}\pi, \widehat{X}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}^* X, \mathrm{MU}^* \mathrm{B}\pi) \ ,$$

où $\widehat{X}$ *désigne la limite dans* $\mathcal{S}$ *du pro-*p*-complété de* X*, est une bijection (homéomorphisme d'ensembles profinis).*

L'exactitude pour M dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}} \cap \widehat{\mathcal{L}}$ de $\mathrm{T}_n(M)/\mathrm{f}^1$ en degré 0 en M/f^1, la proposition 1.3.5 et le corollaire 2.3.3 impliquent :

Théorème 2.3.5. *Soient* π *un groupe de Lie compact commutatif et* $M \to M'$ *un morphisme dans* $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}$ *tel que l'application induite* $M/\mathrm{f}^1 \to M'/\mathrm{f}^1$ *est injective ; alors tout morphisme entre algèbres instables de* M *dans* $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi$ *s'étend en un morphisme de* M' *dans* $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi$*.*

Exemple. Soit G un groupe de Lie compact connexe dont l'homologie entière est sans torsion. Son classifiant $\mathrm{B}G$ est alors sans p-torsion et l'inclusion d'un tore maximal T dans G induit une injection $\mathrm{H}^*\mathrm{B}G \to \mathrm{H}^*\mathrm{B}T$. Soit T' un tore. Le théorème indique que tout morphisme de $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}G$ dans $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}T'$ se prolonge en un morphisme de $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}T$ dans $\mathrm{MU}^*\mathrm{B}T'$. On peut reformuler ce résultat en K-théorie à l'aide du théorème d'Hattori-Stong (cf [DL] section 6) et retrouver le théorème 4.1 de [Wilk] dans ce cas particulier.

Observons enfin que toute application de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ dans le p-complété profini d'un espace sans p-torsion se prolonge à BS^1 ([DL], théorème 3.3). L'exemple suivant en est une application et reprend la remarque de la fin de la section précédente :

Soit X un espace profini (fibrant) pointé connexe et sans p-torsion dont l'espace profini de lacets est également sans p-torsion (par exemple le pro-p-complété du classifiant d'un groupe de Lie compact connexe dont l'homologie entière est sans torsion). La suite exacte de Puppe associée à la cofibration $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{BS}^1 \to \mathrm{Th}_n$ et l'observation précédente montrent que la suite d'ensembles pointés $\mathrm{pt} \to [\mathrm{Th}_n, X]_{\mathrm{pt}} \to [\mathrm{BS}^1, X] \to [\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X]$ est exacte, où $[\mathrm{Th}_n, X]_{\mathrm{pt}}$ désigne les classes d'homotopie d'applications pointées. Autrement dit l'ensemble $[\mathrm{Th}_n, X]_{\mathrm{pt}}$ est égalisateur du 1-cocomplexe $[\mathrm{BS}^1, X] \leftrightarrows\!\!\!\rightarrow [\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X] \times [\mathrm{BS}^1, X]$. Or le diagramme $(\mathrm{T}_n\mathrm{MU}^*X)\widehat{\otimes}(\mathrm{T}_\infty\mathrm{MU}^*X) \leftrightarrows\!\!\!\rightarrow \mathrm{T}_\infty\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{T}_{\mathrm{Th}_n}\mathrm{MU}^*X$ est coégalisateur (on le montre en utilisant le début de la MU-résolution cosimpliciale canonique de X et le point (b) de la proposition 2.2.1). On déduit alors du corollaire 2.3.4 que l'application $[\mathrm{Th}_n, X]_{\mathrm{pt}} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}_-}}(\widetilde{\mathrm{MU}}^*X, \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathrm{Th}_n)$ est une bijection.

Cas où le but n'est pas sans p-torsion

Nous reprenons les notions introduites en section 1.4.3

Soient X un espace profini pointé sans p-torsion et n un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est pointé par l'application constante $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n \to \mathrm{pt} \to X$. On note $\widetilde{\mathrm{T}}_n\mathrm{MU}^*X$ la $\widetilde{\mathrm{G}}$-algèbre noyau de la composée $\mathrm{T}_n\mathrm{MU}^*X \to \mathrm{MU}^*X \to \widehat{\mathrm{MU}}^*$. On obtient un isomorphisme $\widetilde{\mathrm{T}}_n\mathrm{MU}^*X \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}_-}$.

Lorsque X n'est pas sans p-torsion on peut utiliser une MU-résolution libre $X \to X^*$ de X pour construire une suite spectrale ayant pour terme $\mathrm{E}_2^{s,*}$ le s-ième "groupe" d'homologie du cocomplexe $(\widetilde{\mathrm{T}}_n\mathrm{MU}^*X^s)_s$ et aboutissant à la MU-cohomologie continue de l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ mais la convergence de cette suite spectrale ne nous est pas connue en général.

La proposition suivante et la discussion faite en section 1.4.3 montre que la suite spectrale converge lorsque l'espace profini X admet une MU-résolution libre de longueur finie :

Proposition 2.3.6. *Pour tout entier n éventuellement infini, le foncteur $\mathrm{h}\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}} \to \widehat{\mathcal{M}}$, $X \mapsto \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ est une théorie cohomologique réduite.*

Démonstration. Soit $X \to Y$ une cofibration de $\widehat{\mathcal{S}}$ et soit C le quotient Y/X. Notons X_n, Y_n et C_n les espaces profinis fonctionnels de source $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n$ et de but X, Y et C respectivement, et f_n la cofibration induite $X_n \to Y_n$. On montre par récurrence sur n que l'application de la cofibre C_{f_n} de f_n dans C_n, induite par l'application $Y_n \to C_n$, est une équivalence faible. Pour $n = 0$ il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour n. L'action de $\mathbb{Z}/p$ sur X_n et Y_n induit une action sur le quotient C_{f_n} et l'application $\mathrm{C}_{f_n} \to C_n$ est une équivalence faible $\mathbb{Z}/p$-équivariante ; elle induit une équivalence faible entre les espaces profinis de points fixes homotopiques $\mathrm{C}_{f_n}^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p} \to C_{n+1}$.

Le diagramme cocartésien $\begin{array}{ccc} X_n & \to & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{pt} & \to & \mathrm{C}_{f_n} \end{array}$ induit un diagramme cocartésien au niveau des constructions de Borel. L'exactitude du foncteur Fix et la suite exacte de Mayer Vietoris montrent alors que l'application $\mathrm{C}_{f_{n+1}} \to \mathrm{C}_{f_n}^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/p}$ est une équivalence faible, ce qui permet de conclure. $\square$

Soit X un espace profini pointé dont la MU-cohomologie continue est nulle en degré impair. Comme la monade G préserve la propriété d'être concentré en degré pair, l'espace profini X admet une MU-résolution libre par des espaces dont la MU-cohomologie est nulle en degré impair et les cofibres C^n associées ont la même propriété. Supposons que X admet une telle résolution de longueur finie et que les MU-cohomologies continues des espaces profinis $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, C^n)$ sont nulles en degré impair pour tout $n \geq 0$. Les cofibrations $C^n \to X^n \to C^{n+1}$ induisent alors des suites exactes courtes $0 \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, C^n) \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X^n) \to \widetilde{\mathrm{MU}}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, C^{n+1}) \to 0$. On en déduit par récurrence descendante et commutation de T_n aux colimites un isomorphisme de $\mathrm{T}_n\mathrm{MU}^*X$ sur $\mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$ dans $\mathcal{K}_{\mathrm{MU}\,0}$. La proposition suivante et son corollaire illustre ce résultat :

Proposition 2.3.7. *Soient n un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et π un groupe de Lie compact commutatif ; alors l'application*

$$\mathrm{T}_n\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi \to \mathrm{MU}^*\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{B}\pi)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On se ramène à démontrer que pour tout entier m l'application

$$\mathrm{T}_n \mathrm{MU}^* \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^m \to \mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^m)$$

est un isomorphisme. On utilise pour cela la cofibration $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^m \to \mathrm{BS}^1 \to \mathrm{Th}_m$. Comme les MU-cohomologies des espaces fonctionnels associés sont nulles en degré impair (l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^m)$ s'identifie au produit $\mathbb{Z}/p^{\mathrm{inf(n,m)}} \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^m$), la discussion qui précède s'applique. $\square$

COROLLAIRE 2.3.8. *Soient π et π' deux p-groupes abéliens finis ; alors l'application*

$$\mathrm{Hom}(\pi, \pi') \simeq [\mathrm{B}\pi, \mathrm{B}\pi'] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi', \mathrm{MU}^*\mathrm{B}\pi)$$

est une bijection (homomorphisme de groupes).

Démonstration. L'isomorphisme $\mathrm{T}_n \mathrm{MU}^* \mathrm{B}\pi' \to \mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, \mathrm{B}\pi')$ s'étend immédiatement au produit de $\mathrm{B}\pi'$ par un p-groupe abélien fini. On obtient donc par itération un isomorphisme $\mathrm{T}_{n_1} \cdots \mathrm{T}_{n_k} \mathrm{MU}^* \mathrm{B}\pi' \to \mathrm{MU}^* \mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_1} \times \cdots \times \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{n_k}, \mathrm{B}\pi')$. Le corollaire 2.3.3 et la remarque en fin de la section 1.4.2 permettent de conclure. $\square$

QUESTION. Si X est un espace profini dont la MU-cohomologie continue est nulle en degré impair, en est il de même de l'espace profini $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^n, X)$?

Les travaux de Ravenel-Wilson-Yagita ([RWY]) montrent que la réponse est oui si X est un espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{Z}/p^k, l)$, $k, l \geq 0$.

Références

[AD1] J. F. ADAMS,*Stable Homotopy and Generalized Homology*, University of Chicago Press, 1974.

[AD2] J. F. ADAMS, *Lectures on Generalized Cohomology Theories, Springer L. N. M.*, **99**, 1969.

[BOA] J. M. BOARDMAN, Stable Operations in Generalized Cohomology, Handbook of algebraic topology, 1995, 585-686.

[BO] BOURBAKI, *Algèbre*, chap. X, Masson 1980.

[BOU1] A. K. BOUSFIELD, Nice homology coalgebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148** (1970), 473-489.

[Bou2] A. K. Bousfield, On the homology spectral sequence of a cosimplicial space, *Amer. J. Math.*, **109** (1987), 361-394.

[BK] A. K. Bousfield et D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions, and Localizations, Springer L. N. M.*, **304**, 1972.

[BCM] M. Bendersky, E. B. Curtis et H. R. Miller, The Unstable Adams Spectral Sequence for Generalized Homology, *Topology*, **3** (1978), 229-248.

[BJW] J. M. Boardman, D. C. Johnson et W. S. Wilson, Unstable Operations in Generalized Cohomology, Handbook of algebraic topology, 1995, 687-828.

[CS] P .E. Conner et L. Smith, *On the complex bordism of finite complexes*, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **37** (1969), 117-221.

[DS] E. Dror Farjoun et J. Smith, A Geometric Interpretation of Lannes' Functor T, *Théorie de l'Homotopie*, *Astérisque*, **191** (1990), 87-95.

[DL] F.-X. Dehon et J. Lannes, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **89** (1999), 127-177.

[Dr] A. Dress, Zur Spectralsequenz von Faserungen, *Invent. Math.*, **3** (1967), 172-178.

[KW] N. Kuhn et M. Winstead, On the Torsion in the Cohomology of Certain Mapping Spaces, *Topology*, **35** (1996), 875-881.

[Lan] P. S. Landweber, Coherence, Flatness and Cobordism of Classifying Spaces, *Proc. adv. Study Inst. alg. Topol.*, 1970, 256-269.

[La1] J. Lannes, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **75** (1992), 135-244.

[La2] J. Lannes, Divers aspects des opérations de Steenrod, *Journée en l'honneur de Henri Cartan*, *SMF Journ. Annu.*, 1997, 18-27.

[Mac] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1971.

[Mo1] F. Morel, Quelques remarques sur la cohomologie modulo p des pro-p-espaces et les résultats de Jean Lannes concernant les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{B}V, X)$, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **26** (1993), 309-360.

[Mo2] F. Morel, Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur T, *Bull. Soc. Math. France*, **124** (1996), 347-373.

[Re] D. Rector, Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Comment. Math. Helvet.*, **45** (1970), 540-552.

[RW] D. C. Ravenel et W. S. Wilson, The Hopf ring for complex cobordism, *J. Pure Appl. Algebra*, **9** (1976), 241-280.

[RWY] D. C. Ravenel, W. S. Wilson et N. Yagita, Brown-Peterson cohomology from Morava K-theory, *K-Theory*, **15** (1998), 147-199.

[Sc] L. Schwartz, *Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture*, University of Chicago Press, 1994.

[Seg] G. Segal, Classifying Spaces and Spectral Sequences, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **34** (1968), 105-112.

[Su] D. Sullivan, Genetics of Homotopy Theory and the Adams Conjecture, *Annals of Math.*, **100** (1974), 1-79.

[Wilk] C. W. Wilkerson, lambda-ring, binomial domains, and vector bundles over $\mathbb{CP}^{\infty}$, *Commun. Algebra*, **10** (1982), 311-328.

[Wi] W. S. Wilson, The Ω-spectrum for Brown-Peterson Cohomology, Part I, *Comm. Math. Helv.*, **48** (1973), 45-55.

François-Xavier Dehon,
Centre de Recerca Matemàtica
Apartat 50, 08193 Bellaterra
fdehon@crm.es