Théorèmes limites pour certaines fonctionnelles associées aux processus stables sur l'espace de Hölder

M. Ait Ouahra

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia,

Département de Mathématiques, B.P. S 15 Marrakech, Maroc.

M. Eddahbi*

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences et Techniques,

Département de Mathématiques, B.P. 618, Marrakech, Maroc.

Résumé

Dans cet article nous étudions la régularité hölderienne mixte du temps local d'un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$ et celle de sa dérivée fractionnaire par rapport aux variables spaciale et temporelle. Comme application nous démontrons des théorèmes limites pour les temps d'occupation des processus stables symétriques en dimension un dans l'espace des fonctions hölderiennes. Ces résultats généralisent des théorèmes limites dus à Fitzsimmons et Getoor pour un processus stable dans l'espace des fonctions continues. Les processus obtenus à la limite sont les dérivées fractionnaires et les transformés de Hilbert des temps locaux.

Mots Clés : Processus stables, temps local, transformé de Hilbert, dérivée fractionnaire, fonctionnels additives, norme de Hölder.

1 Introduction

Soit $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$ à valeurs réelles avec $X_0 = 0$ i.e. un processus càdlàg à accroissement

*Cette note a été complétée au moment où le second auteur était en visite au *Centre de Recerca Matemàtica* (CRM) Barcelona, Spain.

indépendant stationnaire d'exposant Ψ, défini par :

$$\mathbb{E}\exp\left(i\lambda X_t\right) \;=\; \exp\left(-t\Psi(\lambda)\right), t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R},$$

avec $\Psi(\lambda) = |\lambda|^{\alpha}$.
Pour tout $t > 0$ on définit la mesure aléatoire $\mu_t(\cdot)$ par $\mu_t(A) = \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s)ds$, (où $A \subset \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{1}_A(\cdot)$ est la fonction indicatrice de A) $\mu_t(A)$ est la mesure d'occupation de X dans le Borélien A. Il est bien connu d'après Boylan (1964), Blumental et Getoor (1968) et Barlow (1988) que la mesure $\mu_t(A)$ admet une densité notée L_t^x par rapport à la mesure de Lebesgue, $(L_t^x : t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ est appelé la famille des temps locaux associée à X, de plus L_t^x admet une version p.s. continue (en t et x) et L_t^x vérifie la formule de densité d'occupation et la propriété de scaling suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X_s)ds \;&=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)L_t^x dx \quad \forall \quad f \text{ borélienne bornée} \\ \{L_{\lambda t}^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}x} : t \geq 0\} &\overset{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^{1-\frac{1}{\alpha}} L_t^x : t \geq 0\} \text{ pour tout } \lambda > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Depuis que Trotter (1958) a démontré l'existence d'une version bi–continue du processus du temps local du mouvement brownien uni–dimensionnel, on ne cesse de découvrir des propriétés profondes des temps locaux, et on a abouti surtout à une belle théorie en ce qui concerne le temps local du brownien. L'étude des temps locaux est motivée par le rôle prépondérant du temps local dans la théorie des excursions. D'autre part l'utilisation des temps locaux facilite souvent l'étude des fonctionnelles additives d'un processus de Markov.

Le temps local d'un processus stable est une fonctionnelle additive particulière associée a ce processus, elle appartient à la classe des fonctionnelles additives continues, associées aux processus stables, d'énergie nulle, au sens de Fukushima (1979). Cette classe contient des exemples importants notamment la dérivée fractionnaire et la transformée de Hilbert du temps local. Elles ont été étudiées, dans le cas du mouvement Brownien, par plusieurs auteurs dans divers points de vu. L'existence de la valeur principale de Cauchy du temps local a été remarquée par Itô and Mckean (1965). Yor (1982), Yamada (1984), Nakao (1985) et Bertoin (1989) ont développés l'étude de ces fonctionnelles, ce qui a permis par exemple d'obtenir une généralisation de la formule de Itô (cf. Yor (1982) et Bertoin (1990)) et d'établir des théorèmes limites pour les temps d'occupations du mouvement Brownien (cf. Yamada (1986)).
Dans cette note, nous nous sommes intéressés aux théorèmes limites des

processus de la forme

$$\frac{1}{\lambda^p}\int_0^{\lambda t} f(X_s)ds, \text{ pour } p \in \left]\frac{\alpha-1}{2\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right[\tag{1.2}$$

où $\{X_t : t \geq 0\}$ un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$ et f est une dérivée fractionnaire d'une fonction $g \in \mathcal{C}^\beta$ (hölderienne d'ordre β) et à support compact, suivant la topologie hölderienne.
La dérivée fractionnaire a été étudiée par Ezawa *et al.* (1975) pour des objectifs de la physique et qui apparaît naturellement dans certains théorèmes limites (Théorème 2.1 et Théorème 2.2 dans Yamada (1986)). Elles apparaissent aussi de façon naturelle dans le calcul stochastique (cf. Fukushima (1979)) et la théorie spectrale des cordes vibrantes (cf. Bertoin (1989)). La fonctionnelle $H_t^x(\gamma)$, $(0 < \gamma < \frac{1}{2})$ associée à la partie finie de Hadamard $p.f.(x_+^{-1-\gamma})$ et la fonctionnelle C_t^x associée à la valeur principale de Cauchy $v.p.(\frac{1}{x})$ peuvent être obtenues moyennant la transformée de Hilbert et $D^\gamma L_t^\bullet$ – la dérivée fractionnaire d'ordre γ par rapport à la variable x du temps local brownien (cf. Yor (1982), Yamada (1984, 1985, 1986), Biane et Yor (1987) et Bertoin (1990).)
Citons enfin la contribution de Yamada (1985) qui a montré dans le cas du mouvement Brownien que le processus $(D^\gamma L_t^\bullet(x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R})$ vérifie les conditions de Hölder suivantes : Pour tout $T > 0$ p.s.
$\forall\, 0 < \beta < \frac{1}{2} - \gamma$, $\exists\, C > 0$ telle que $\forall\, 0 \leq t, s \leq T$, $x \in \mathbb{R}$

$$|D^\gamma L_t^\bullet(x) - D^\gamma L_s^\bullet(x)| \quad \leq \quad C|t-s|^\beta\ , \tag{1.3}$$

$\forall\ 0 < \beta < \frac{1}{2} - \gamma$, $\exists\ C > 0$ telle que $\forall\ 0 \leq t \leq T$, $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x|, |y| \leq M$, $M > 0$

$$|D^\gamma L_t^\bullet(x) - D^\gamma L_t^\bullet(y)| \quad \leq \quad C|x-y|^\beta\ . \tag{1.4}$$

Cette régularité de $D^\gamma L_t^\bullet$ entraîne celle de $H_t^x(\gamma)$:
Pour tous T, $M > 0$ p.s.
$\forall\, 0 < \beta < \frac{1}{2} - \gamma$, $\exists\, C > 0$ telle que $\forall\, 0 \leq t, s \leq T$, $|x| \leq M$

$$|H_t^x(\gamma) - H_s^x(\gamma)| \quad \leq \quad C|t-s|^\beta\ ,$$

$\forall\, 0 < \beta < \frac{1}{2} - \gamma$, $\exists\, C > 0$ telle que $\forall\, 0 \leq t \leq T$, $|x|\,, |y| \leq M$

$$|H_t^x(\gamma) - H_t^y(\gamma)| \quad \leq \quad C|x-y|^\beta\ .$$

Boufoussi *et al.* (1997) ont donnés, dans le cas du mouvement Brownien également, des résultats plus fins que (1.3) et (1.4) plus précisément nous avons :

• Pour tous $t > 0$ et $p < \infty$, la trajectoire $x \mapsto D^\gamma L_t^\bullet(x)$ vérifie p.s. la condition de Hölder d'indice $\frac{1}{2} - \gamma$ en norme $L^p(\mathbb{R})$.

• Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $T > 0$ et $0 < \nu < \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$, la trajectoire $t \mapsto D^\gamma L_t^\bullet(x)$ vérifie p.s. la condition de Hölder d'indice ν sur $[0, T]$.

Nous en déduisons en particulier que :
$\forall\, 0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$, et $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $\exists\, C > 0$ telle que $\forall\, 0 \leq t, s \leq T$, $|x| \leq M$

$$|H_t^x(\gamma) - H_s^x(\gamma)| \quad \leq \quad C|t-s|^\beta.$$

Les théorèmes limites pour les mesures d'occupations ont été étudiés par Yamada (1986), (1996) dans le cas $\alpha = 2$ (i.e. X est un mouvement brownien), voir aussi Kasahara (1977), (1981) et par Fitzsimmons et Getoor (1992) pour les processus stables. Les convergences dans tous ces théorèmes sont étudiés dans le cas des trajectoires continues et notre but dans cette note est de démontrer qu'on peut étendre les résultats de Yamada (1986) et Fitzsimmons et Getoor (1992) sur les théorèmes limites pour les mesures d'occupations associés aux processus stables uni–dimensionnel à la topologie des espaces de Hölder.

1.1 Espaces fonctionnelles.

Nous considérons les espaces de fonctions vérifiant une condition de Hölder en norme uniforme. Soit $f \in \mathcal{C}_0([0,1])$, le module de continuité de f en norme uniforme, notée $\omega_\delta(f, \eta)$, est défini par

$$\omega_\delta(f,\eta) \ = \ \sup_{0<|t-s|\leq\eta} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\delta}.$$

Pour $0 < \delta < 1$, on définit

$$\mathcal{C}_0^\delta := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \text{tel que } f(0) = 0 \text{ et } \ \forall\, \eta > 0,\ \omega_\delta(f,\eta) < \infty\}$$

Il est bien connu que $\mathcal{C}_0^\delta$, muni de la norme $\|f\|_\delta := \omega_\delta(f, 1)$, est un espace de Banach.

Remarque 1.1. *$\mathcal{C}_0^\delta$ n'est pas séparable, à cause de ce désavantage on introduit un sous espace fermé séparable $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$, défini par :*

$$\mathcal{C}_0^{\delta,0} := \left\{ f \in \mathcal{C}_0^\delta \ \textit{tel que} \ \lim_{\eta\to 0} \omega_\delta(f,\eta) = 0 \right\}.$$

Dans ce qui suit C désignera une constante qui change de valeur d'une ligne à l'autre.

2 Temps local et dérivées fractionnaires

2.1 Régularité du temps local.

Soit $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $\{L_t^x : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ son temps local. D'après Marcus et Rosen (1992) pour tout $T > 0$ les conditions suivantes sont vérifiées presque sûrement :
$\forall\, 0 < \beta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$, $\exists\, C > 0$ telle que $\forall\, 0 \leq t,\, s \leq T$, $|x| \leq M$

$$|L_t^x - L_s^x| \;\leq\; C|t-s|^\beta \tag{2.5}$$

$\forall\, 0 < \beta < \frac{\alpha-1}{2}$, $\exists\, C > 0$ telle que $\forall\, 0 \leq t \leq T$, $|x|, |y| \leq M$

$$|L_t^x - L_t^y| \quad \leq \quad C|x-y|^\beta.$$

Remarque 2.1. *Bien que le processus stable $\{X_t : t \geq 0\}$ n'est pas nécessairement continu, son temps local possède une version jointement hölderienne en t et x.*

2.2 Dérivées fractionnaires.

Soit $\beta > 0$, considérons l'espace $\mathcal{C}^\beta$ définit par

$$\mathcal{C}^\beta := \Big\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} :\ \text{tel que} \\ |f(x) - f(y)| \leq C(f,\beta)\, |x-y|^\beta\,,\ \forall |x|, |y| \leq M\Big\}.$$

Pour $\gamma \in]0, \beta[$ on définit la dérivée fractionnaire d'ordre γ d'une fonction f appartenant à $\mathcal{C}^\beta \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ par :

$$D_\pm^\gamma f(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^{+\infty} \frac{f(x \pm y) - f(x)}{y^{1+\gamma}} dy$$

et on défnit l'opérateur D^γ par $D^\gamma := D_+^\gamma - D_-^\gamma$.
Puisque $\frac{1}{y}$ n'est pas intégrable à l'infini, la définition de $D_\pm^\gamma$ doit être modifier pour $\gamma = 0$. Donc on a la définition suivante :

$$D_\pm^0 f(x) \;=\; -\int_0^{+\infty} \frac{f(x \pm y) - f(x)\mathbb{1}_{]0,1[}(y)}{y} dy$$

pour $f \in \mathcal{C}^\beta \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\beta > 0$.
On note aussi $D^0 := D_+^0 - D_-^0$ c'est la transformation de Hilbert modulo (le facteur $\frac{1}{\pi}$), nous renvoyons le lecteur à Yamada (1985), (1986).

La formule suivante connue sous le nom (*Switchnig Identity*) joue un rôle important dans les démonstrations des théorèmes de la section 3.
Soit $0 \leq \gamma < 1$ et on suppose que $f,\, g \in \mathcal{C}^\beta \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors pour $\beta > \gamma$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) D_-^\gamma g(x) dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} g(x) D_+^\gamma f(x) dx. \tag{2.6}$$

Pour plus de détails sur la dérivée fractionnaire nous renvoyons le lecteur à Hardy et Littlewood (1928), Titchmarsh (1948) et Samko *et al.* (1993).

Nous aurons, également, besoin d'un résultat de régularité de l'application $(t,x) \mapsto L_t^x$ par rapport aux variables espace temps.

Théorème 2.1. *Soit $T > 0$. Alors la condition suivante est vérifiée presque sûrement : Pour tout $0 < \beta_1 < \frac{\alpha-1}{2\alpha}$ et $0 < \beta_2 < \frac{\alpha-1}{2}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $(t,s) \in [0,T]^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|, |y| \leq M$ on a*

$$|L(t,x) - L(t,y) - L(s,x) + L(s,y)| \quad \leq \quad C|t-s|^{\beta_1} |x-y|^{\beta_2}. \tag{2.7}$$

Preuve. En appliquant la propriété de Markov pour X en s et la propriété de scaling on a pour tout $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left| L(t,x) - L(t,y) - L(s,x) + L(s,y)\right|^{2m} = & \\
&= \mathbb{E}\left| L(t-s,x) - L(t-s,y)\right|^{2m} \circ \theta_s \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left| L(t-s,x) - L(t-s,y)\right|^{2m} \circ \theta_s \big/ X_s \right] \\
&= \int \mathbb{P}(X_s \in dz) \mathbb{E}\left| L(t-s,x-z) - L(t-s,y-z)\right|^{2m}.
\end{aligned}$$

Or d'après Marcus et Rosen (1992) on a : pour tout $m \geq 1$

$$\mathbb{E}\left| L(t,x) - L(t,y)\right|^{2m} \quad \leq \quad C(\alpha,m) t^{\frac{(\alpha-1)}{2\alpha} 2m} \left| x-y \right|^{\frac{\alpha-1}{2} 2m}$$

où $C(\alpha,m)$ est une constante qui dépend seulement de α et m. Par suite

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{P}(X_s \in dz) & \mathbb{E}\left| L(t-s,x-z) - L(t-s,y-z)\right|^{2m} \\
&\leq \int \mathbb{P}(X_s \in dz) C(\alpha,m) |t-s|^{\frac{(\alpha-1)}{2\alpha} 2m} \left| x-y \right|^{\frac{\alpha-1}{2} 2m} \\
&\leq C(\alpha,m) |t-s|^{\frac{(\alpha-1)}{2\alpha} 2m} \left| x-y \right|^{\frac{\alpha-1}{2} 2m}.
\end{aligned}$$

D'où, si $\| \cdot \|_{2m}$ désigne la norme $[\mathbb{E}[\,\cdot\,]^{2m}]^{1/2m}$, alors

$$\|L(t,x)-L(t,y)-L(s,x)+L(s,y)\|_{2m} \leq$$
$$\leq C(\alpha,m)|t-s|^{\frac{(\alpha-1)}{2\alpha}}\,|x-y|^{\frac{\alpha-1}{2}}. \quad (2.8)$$

Et d'après une version du théorème de Kolmogorov dans l'espace $\mathcal{H}_0^{a,b}$ (l'espace hölderien à deux paramètres) voir le Théorème 1.7 dans Boufoussi (1994)), nous avons la conclusion du théorème.

En utilisant les mêmes techniques que Yamada (1985) (voir aussi Fitzsimmons et Getoor (1992), p. 319) il est facile de prouver le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Soit T un nombre réel strictement positif.* $\forall\, 0<\gamma<\frac{\alpha-1}{2}$, $\exists\, C>0$ *telle que* $\forall\, 0\leq t,s\leq T,\ |x|\leq M$,

$$\left|D_{\pm}^{\gamma}L_t^{\bullet}(x)-D_{\pm}^{\gamma}L_s^{\bullet}(x)\right| \quad\leq\quad C|t-s|^{\beta}, \forall\,\beta<(\alpha-1)/\alpha-\gamma$$

$\forall\, 0<\gamma<\frac{\alpha-1}{2}$, $\exists\, C>0$ *telle que* $\forall\, 0\leq t,s\leq T, |x|,|y|\leq M$,

$$\left|D_{\pm}^{\gamma}L_t^{\cdot}(x)-D_{\pm}^{\gamma}L_s^{\cdot}(x)\right| \quad\leq\quad C\,|x-y|^{\beta}, \forall\,\beta<(\alpha-1)/2-\gamma.$$

De plus $|D_{\pm}^{\gamma}L_t^{\bullet}(x)|=O(|x|^{-1-\gamma})$, $|x|\to\infty$ *uniformément en* t.

Dans le théorème suivant nous présentons un résultat plus fin que celui du corollaire ci–dessus et qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 2.2. *(Régularité de la dérivée fractionnaire du temps local). Soient $T>0$ et $0\leq\gamma<\frac{\alpha-1}{2}$, avec α l'indice du processus stable symétrique X. Alors presque sûrement pour tout $0<\lambda<\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}$, il existe une constante $0<C(\omega)<+\infty$ telle que pour tous $0\leq t,\ s\leq T$ et $x\in\mathbb{R}$*

$$|D^{\gamma}L_t^{\bullet}(x)-D^{\gamma}L_s^{\bullet}(x)| \quad\leq\quad C(\omega)|t-s|^{\lambda}.$$

Preuve. Nous faisons la démonstration pour D_{+}^{γ} dans le cas de $\gamma>0$ (pour $\gamma=0$ nous utilisons les mêmes techniques que Fitzsimmons et Getoor (1992), Lemme 2.12 page 316).
Soit $x\in\mathbb{R}$ et $0\leq t,\ s\leq T$, d'après la Définition de la dérivée fractionnaire on a

$$\left|D_{+}^{\gamma}L_t^{\bullet}(x)-D_{+}^{\gamma}L_s^{\bullet}(x)\right|=$$
$$=\frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\left|\int_0^{+\infty}\frac{L_t^{x+u}-L_t^{x}}{u^{1+\gamma}}du-\int_0^{+\infty}\frac{L_s^{x+u}-L_s^{x}}{u^{1+\gamma}}du\right|$$
$$\leq\frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_0^{+\infty}\frac{\left|L_t^{x+u}-L_s^{x+u}-L_t^{x}+L_s^{x}\right|}{u^{1+\gamma}}du$$

$$\leq \frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_0^b \frac{\left|L_t^{x+u}-L_s^{x+u}-L_t^x+L_s^x\right|}{u^{1+\gamma}}du$$
$$+\frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_b^{+\infty} \frac{\left|L_t^{x+u}-L_s^{x+u}-L_t^x+L_s^x\right|}{u^{1+\gamma}}du$$
$$=: I_1+I_2.$$

Majoration de I_1. En vertu de la condition de Hölder (2.7), du temps local en t et x, nous avons

$$I_1 \;\leq\; \frac{C}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_0^b |t-s|^{\beta_1}u^{\beta_2-1-\gamma}du$$

avec $\beta_1<(\alpha-1)/2\alpha$ et $\beta_2<(\alpha-1)/2$.
Par conséquent

$$I_1 \;\leq\; \frac{C}{|\Gamma(-\gamma)|}\frac{b^{\beta_2-\gamma}}{\beta_2-\gamma}|t-s|^{\beta_1}\ ,\ \text{avec}\ \ \gamma<\beta_2.$$

Majoration de I_2. Nous savons d'après (2.5) qu'il existe une variable aléa toire $C(\omega)$ finie telle que

$$|L_t^x-L_s^x| \;\leq\; C(\omega)|t-s|^{\beta}$$

où $\beta<\frac{\alpha-1}{\alpha}$, par suite

$$I_2 \quad\leq\quad \frac{2C(\omega)}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_b^{+\infty}\frac{|t-s|^{\beta}}{u^{1+\gamma}}du \;=\; \frac{2C(\omega)}{|\Gamma(-\gamma)|}\frac{b^{-\gamma}}{\gamma}|t-s|^{\beta},$$

d'où

$$I_1+I_2 \quad\leq\quad \frac{2C(\omega)}{|\Gamma(-\gamma)|}\frac{b^{\beta_2-\gamma}}{\beta_2-\gamma}|t-s|^{\beta_1}+\frac{2C(\omega)}{|\Gamma(-\gamma)|}\frac{b^{-\gamma}}{\gamma}|t-s|^{\beta};$$

en choisissant $b=|t-s|^{\frac{\beta-\beta_1}{\beta_2}}$, on obtient

$$\left|D_+^{\gamma}L_t^{\bullet}(x)-D_+^{\gamma}L_s^{\bullet}(x)\right| \;\leq\; C(\omega)|t-s|^{\beta(1-\frac{\gamma}{\beta_2})+\beta_1\frac{\gamma}{\beta_2}},$$

par conséquent pour tout $0<\lambda<\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}$ on peut trouver $\gamma<\beta_2<\frac{\alpha-1}{2}\leq\frac{1}{2}$, $0<\beta<\frac{\alpha-1}{\alpha}$ et $0<\beta_1<\frac{\alpha-1}{2\alpha}$ tel que $\lambda=\beta(1-\frac{\gamma}{\beta_2})+\beta_1\frac{\gamma}{\beta_2}$.

Remarque 2.2. *Ce résultat étend celui de Boufoussi et al. (1997) aux processus stable symétrique et donne une amélioration à celui de Yamada (1985).*

Le lemme suivant sera utile dans les preuves des théorèmes limites.

Lemme 2.1. *Soient $T > 0$ et $0 \le \gamma < \frac{\alpha-1}{2}$, avec α l'indice du processus stable symétrique X et $\{L_t^x, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ son temps local. Alors pour tous $0 \le t,\ s \le T$, $x \in \mathbb{R}$, et $m \ge 1$*

$$\|D^\gamma L_t^\bullet(x) - D^\gamma L_s^\bullet(x)\|_{2m} \ \le\ C|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}. \tag{2.9}$$

où la constante C dépend seulement de α, m et γ.

Preuve. Par définition de D^γ nous avons

$$\begin{aligned}|D^\gamma L_t^\bullet(x) - D^\gamma L_s^\bullet(x)| \le & \frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_0^b \frac{\left|L_t^{x+u} - L_s^{x+u} - L_t^x + L_s^x\right|}{u^{1+\gamma}}\, du \\ & + \frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_b^{+\infty} \frac{\left|L_t^{x+u} - L_s^{x+u} - L_t^x + L_s^x\right|}{u^{1+\gamma}}\, du,\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\|D^\gamma L_t^\bullet(x) - D^\gamma L_s^\bullet(x)\|_{2m} \le & \frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_0^b \frac{\left\|L_t^{x+u} - L_s^{x+u} - L_t^x + L_s^x\right\|_{2m}}{u^{1+\gamma}}\, du \\ & + \frac{1}{|\Gamma(-\gamma)|}\int_b^{+\infty} \frac{\left\|L_t^{x+u} - L_s^{x+u} - L_t^x + L_s^x\right\|_{2m}}{u^{1+\gamma}}|\, du \\ & =: J_1 + J_2\end{aligned}$$

En utilisant respectivement les inégalités (2.8) et (2.5) on obtient

$$J_1 \ \le\ C_1(\alpha, m, \gamma)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} b^{\frac{\alpha-1}{2}-\gamma},$$

et

$$J_2 \ \le\ C_2(\alpha, m, \gamma)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} b^{-\gamma},$$

en choisissant $b = |t-s|^{\frac{1}{\alpha}}$ on aura le résultat.

Remarque 2.3. *Le Théorème 2.2 peut se déduire du lemme précédent à l'aide du critère de Kolmogorov.*

3 Théorèmes limites

3.1 Critère de tension dans l'espace $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$

Pour étudier la convergence en loi des processus de la forme (1.2) pour la topologie hölderienne, nous utilisons le critère de tension que Nous rappelons ci–dessous.

Lemme 3.1. *Une suite de processus* $\{\xi_n : n \geq 1\}$ *converge en loi dans* $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ *si et seulement si la suite des lois* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}o\xi_n^{-1}$ *des éléments aléatoires* ξ_n *est tendue sur* $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ *et on a la convergence des lois fini–dimensionnelles de* ξ_n.

Théorème 3.1. *Soit* $\{\xi_n : n \geq 1\}$ *une suite de processus nuls en zéro et vérifiant pour des constantes* a, $b > 0$ *et* $C > 0$ *et* $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, \lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left[|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \lambda\right] \;\leq\; C\lambda^{-a}|t-s|^{1+b},$$

alors la suite des lois $\mathbb{P}_n$ *des processus* ξ_n *est tendue dans* $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ *pour* $0 < \delta < b/a$.

La preuve du Lemme 3.1 se trouve dans Hamadouche (1997) et celle du Théorème 3.1 dans Kerkyacharian et Roynette (1991).

Remarque 3.1. *En pratique ce théorème du à Lamperti (1962) est utilisé sous sa version des moments :*

$$\sup_n \mathbb{E}\,|\,\xi_n(t) - \xi_n(s)|^a \quad \leq \quad C|t-s|^{1+b}.$$

Nous présentons dans cette section deux théorèmes limites pour les fonctionnelles additives de la forme (1.2) suivant la topologie hölderienne.

Théorème 3.2. *Soit* $X = \{X_t : t \geq 0\}$ *un processus stable symétrique à valeur dans* $\mathbb{R}$, *d'indice* $1 < \alpha \leq 2$. *Soit* $0 < \gamma < \frac{\alpha-1}{2}$ *et on suppose que* $f = D_+^{\gamma} g$, *où* $g \in \mathcal{C}^{\beta}$ *et à support compact pour un certain* $0 < \gamma < \beta < \frac{\alpha-1}{2}$ *alors,*

$$\left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{1+\gamma}{\alpha}}} \int_0^{nt} f(X_s)ds \right\}_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}}_{n\to+\infty} \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right] H_t^0(\gamma^-) \right\}_{t\geq 0}$$

où $H_t^0(\gamma^-) = D_-^{\gamma} L_t^{\bullet}(0)$ *et cette convergence a eu lieu dans l'espace de Hölder* $\mathcal{C}_0^{\delta}$ *avec* $\delta < \frac{\alpha-1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}$.

Preuve. On fait la démonstration dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ (car la convergence dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ implique la convergence dans $\mathcal{C}_0^{\delta}$).
Il est facile de verifier que la trajectoire

$$t \longmapsto A_t^n \;=\; \frac{1}{n^{1-\frac{1+\gamma}{\alpha}}} \int_0^{nt} f(X_s)ds$$

appartient p.s. à $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ avec $\delta < \frac{\alpha-1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}$. Or d'après Fitzsimmons et Getoor (1992) $\{A_t^n : t \geq 0\}$ converge en loi vers le processus $\left\{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) H_t^0(\gamma^-)\right\}_{t\geq 0}$ dans l'espace des fonctions continues ce qui implique la convergence des

lois fini–dimensionnelles. D'après le Lemme 3.1 il reste à montrer la tension. Pour le faire nous utilisons le critère de Lamperti (1962) voir la Remarque 3.1.
Soit $m \geq 1$, en utilisant (1.1) et (2.6) nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|A_t^n - A_s^n|^{2m} &= \mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1-\frac{1+\gamma}{\alpha}}}\left(\int_0^{nt} f(X_u)du - \int_0^{ns} f(X_u)du\right)\right|^{2m} \\
&= n^{2m\frac{\gamma}{\alpha}}\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)L_t^{x/n^{\frac{1}{\alpha}}}dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)L_s^{x/n^{\frac{1}{\alpha}}}dx\right|^{2m} \\
&= n^{2m\frac{\gamma}{\alpha}}\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} D_+^{\gamma}g(x)\left(L_t^{x/n^{\frac{1}{\alpha}}} - L_s^{x/n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)dx\right|^{2m} \\
&= n^{2m\frac{\gamma}{\alpha}}\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\left(D_-^{\gamma}L_t^{\bullet/n^{\frac{1}{\alpha}}}(x) - D_-^{\gamma}L_s^{\bullet/n^{\frac{1}{\alpha}}}(x)\right)dx\right|^{2m}
\end{aligned}$$

Or (si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a > 0$ on note par h_a la fonction $x \mapsto h(ax)$ alors $D_{\pm}^{\gamma}(h_a) = a^{\gamma}(D_{\pm}^{\gamma}h)_a$) par suite

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|A_t^n - A_s^n|^{2m} &= \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\left(D_-^{\gamma}L_t^{\bullet}(xn^{\frac{-1}{\alpha}}) - D_-^{\gamma}L_s^{\bullet}(xn^{\frac{-1}{\alpha}})\right)dx\right|^{2m} \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_K |g(x)|^{m'}dx\right]^{\frac{2m}{m'}}\int_K\left|D_-^{\gamma}L_t^{\bullet}(xn^{\frac{-1}{\alpha}}) - D_-^{\gamma}L_s^{\bullet}(xn^{\frac{-1}{\alpha}})\right|^{2m}dx
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{2m} + \frac{1}{m'} = 1$ et $K = \mathrm{supp}(g)$, par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|A_t^n - A_s^n|^{2m} &\leq C\int_K \mathbb{E}\left|D_-^{\gamma}L_t^{\bullet}(xn^{\frac{-1}{\alpha}}) - D_-^{\gamma}L_s^{\bullet}(xn^{\frac{-1}{\alpha}})\right|^{2m}dx \\
&\leq C|t-s|^{(\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha})2m} \quad \text{d'après (2.9)}
\end{aligned}$$

D'où $(A_t^n)_n$ est tendue dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ avec $\delta < \frac{\alpha-1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}$.

Théorème 3.3. *Soit $X = \{X_t : t \geq 0\}$ un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$. On suppose que $f = D_+^0 g$ où $g \in \mathcal{C}^{\beta}$ à support compact pour $\beta > 0$. Alors*
i)

$$\left\{\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\log(n)}\int_0^{nt} f(X_s)ds\right\}_{t\geq 0}$$

converge en loi lorsque n tend vers $+\infty$ vers le processus

$$\left\{-\alpha^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) L_t^0\right\}_{t\geq 0}$$

ii)

$$\left\{\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\int_0^{nt}\left(f(X_s)+\alpha^{-1}\log(n)g(X_s)\right)ds\right\}_{t\geq 0}$$

converge en loi lorsque n tend vers $+\infty$ vers le processus

$$\left\{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) H_t^0(0^-)\right\}_{t\geq 0}.$$

Ces convergences ont eux lieu dans l'espace de Hölder $\mathcal{C}_0^\delta$ avec $\delta<\frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Preuve. Pour i) on pose

$$A_t^n=\frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}\log(n)}\int_0^{nt} f(X_s)ds,$$

par les mêmes arguments de la démonstration du Théorème 3.2 et le fait que (si $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a>0$ on note par h_a la fonction $x\mapsto h(ax)$ alors $D_\pm^0(h_a)=(D_\pm^0 h)_a+h_a\log a$) on a

$$\begin{aligned} A_t^n &\overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\log(n)}\int_{\mathbb{R}} g(x)D_-^0\left(L_t^\bullet(xn^{\frac{-1}{\alpha}})\right)dx-\alpha^{-1}\int_{\mathbb{R}} g(x)L_t^{xn^{\frac{-1}{\alpha}}}dx \\ &=: B_t^n-C_t^n \end{aligned}$$

Montrons que B_t^n converge vers 0 dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ lorsque n tend vers $+\infty$ avec $\delta<\frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Il est claire que $B_t^n\in\mathcal{C}_0^{\delta,0}$, car

$$\begin{aligned} \lim_{\eta\to 0}\omega_\delta(B_t^n,\eta) &= \lim_{\eta\to 0}\sup_{0<|t-s|<\eta}\frac{|B_t^n-B_s^n|}{|t-s|^\delta} \\ &= \lim_{\eta\to 0}\sup_{0<|t-s|<\eta}\frac{1}{\log(n)}\frac{|\int_{\mathbb{R}} g(x)[D_-^0(L_t^\bullet(xn^{\frac{-1}{\alpha}}))-D_-^0(L_s^\bullet(xn^{\frac{-1}{\alpha}}))]dx|}{|t-s|^\delta} \\ &\leq \lim_{\eta\to 0}\sup_{0<|t-s|<\eta}\frac{C}{\log(n)}|t-s|^{\lambda-\delta},\ \text{avec } 0<\lambda<\frac{\alpha-1}{\alpha} \\ &\leq \lim_{\eta\to 0}\frac{C}{\log(n)}\,\eta^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\varepsilon-\delta}=0,\ \text{pour } \delta<\frac{\alpha-1}{\alpha}\leq\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\omega_\delta(B_t^n, 1) &= \sup_{0<|t-s|<1} \frac{|B_t^n - B_s^n|}{|t-s|^\delta} \\
&= \sup_{0<|t-s|<1} \frac{1}{\log(n)} \frac{|\int_{\mathbb{R}} g(x)(D_-^0 L_t^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}) - D_-^0 L_s^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}))dx|}{\||t-s|^\delta} \\
&\leq \sup_{0<|t-s|<1} \frac{1}{\log(n)} \frac{\int_{\mathbb{R}} |g(x)||D_-^0 L_t^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}) - D_-^0 L_s^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}})|dx}{|t-s|^\delta} \\
&\leq \sup_{0<|t-s|<1} \frac{C}{\log(n)} |t-s|^{\lambda-\delta} \ =: I_n \text{ pour } 0 < \lambda < \frac{\alpha-1}{\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

D'où $I_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ pour $\delta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$.
Montrons maintenant que C_t^n converge en loi vers $\alpha^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) L_t^0$ dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$.
Nous savons que

$$
\int_{\mathbb{R}} g(x) L_t^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}} dx \ \xrightarrow{\mathcal{L}}_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) L_t^0
$$

dans l'espace des fonctions continues. Il reste à montrer la tension. Soit $m \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|C_t^n - C_s^n|^{2m} &= \alpha^{-2m}\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\left(L_t^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}} - L_s^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}}\right)dx\right|^{2m} \\
&\leq \alpha^{-2m}\mathbb{E}\left(\int_K |g(x)|^{m'}dx\right)^{\frac{2m}{m'}} \int_K \left|L_t^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}} - L_s^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}}\right|^{2m} dx \\
&\leq C|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}2m} \text{ d'après (2.9)}
\end{aligned}
$$

$(C_t^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ pour tout $\delta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$.
Pour ii) de la même façon nous avons

$$
\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \int_0^{nt} \left(f(X_s) + \alpha^{-1}\log(n) g(X_s)\right) ds \ \stackrel{\mathcal{L}}{=} \ \int_{\mathbb{R}} g(x) H_t^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}}(0^-)dx.
$$

Or d'après Fitzsimmons et Getoor (1992)

$$
\int_{\mathbb{R}} g(x) H_t^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}}(0^-)dx \longrightarrow_{n\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) H_t^0(0^-)
$$

dans l'espace des fonctions continues.
Il suffit, alors, de montrer la tension. Posons

$$E_t^n := \int_{\mathbb{R}} g(x) H_t^{xn^{-\frac{1}{\alpha}}}(0^-) dx.$$

Soit $m \geq 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|E_t^n - E_s^n|^{2m} &= \mathbb{E}\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(D_-^0 L_t^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}) - D_-^0 L_s^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}) \right) dx \right|^{2m} \\
&\leq \left(\int_K |g(x)|^{m'} dx \right)^{\frac{2m}{m'}} \mathbb{E} \int_K \left| D_-^0 L_t^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}) - D_-^0 L_s^\bullet(xn^{-\frac{1}{\alpha}}) \right|^{2m} dx \\
&\leq \ C|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}2m}
\end{aligned}$$

donc $(E_t^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}_0^{\delta,0}$ avec $\delta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Références

[1] M.T. Barlow (1988) Necessary and sufficient conditions for the continuity of local time. *Ann. Prob.* **16**, 1389–1427.

[2] J. Bertoin (1989) Application de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien refléchi. *Ann. Int. H. Poincaré.* **25** (3), 323–367.

[3] J. Bertoin (1990) Complements on the Hilbert transform and the fractional derivative of brownian local time. *J. Math. Kyoto Univ.* **30** (4), 651–670.

[4] Ph. Biane et M. Yor (1987) Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sc. Math. série* 2, **11**, 23–101.

[5] R.M. Blumenthal et R.K. Getoor (1968) *Markov processes and potential theory.* Academic Press, New York.

[6] B. Boufoussi (1994) Espaces de Besov, Caractérisation et applications. *Thèse de l'université Henri poincaré, Nancy I, France.*

[7] B. Boufoussi, M. Eddahbi et A. Kamont (1997) Sur la dérivée fractionnaire du temps local Brownien. *Prob. Math. Stat.* **17** (2), 311–319.

[8] E.S. Boylan (1964) Local times for a class of Markov Processes. *Illinois J. Math.* **8**, 19–39.

[9] H. Ezawa, J.R. Klauder and L.A. Sheep (1975) Vestigical effects of singular potentials in diffusion theory and quantum mechanics. *J. Math. Phys.* **16** (4), 783–799.

[10] T.J. Fitzsimmons and R.K. Getoor (1992) Limit theorems and variation properties for fractional derivatives of the local time of stable process. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* **28** (2), 311–333.

[11] M. Fukushima (1979) A decomposition of additive functionals of finite energy. *Nagoya Math. J.* **74**, 137–168.

[12] D. Hamadouche (1997) *Convergence de processus stochastique à trajectoires Hölderiennes.* Thèse de l'Université des Sciences et Technologie de Lille.

[13] G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1928) Some properties of fractional integrals. *I, Math. Zeit.* **27**, 567–606.

[14] K. Itô and H.P. Mckean Jr. (1965) *Diffusion processes and their sample paths.* Berlin, New York, Springer Verlag

[15] Y. Kasahara (1977) Limit theorems of occcupation times of Marcov processes. *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* **12**, 801–818.

[16] Y. Kasahara (1981) Two limit theorems for occupation times of Markov processes. *Jpn J. Math.* **7**, 291–300.

[17] G. Kerkyacharian et B. Roynette (1991) Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Itô–Nisio. *C.R. Acad. Sci. Paris.* T. **312**, Série 1, 877–882.

[18] J. Lamperti (1962) On convergence of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **104**, 430–435.

[19] M. Marcus and J. Rosen (1992) p–variation of the local times of symmetric stable processes and of Gaussian processes with stationary increments. *Ann. Prob.* **20** (4), 1685–1713.

[20] S. Nakao (1985) Stochastic calculus for continuous additive functionals of zero energy. *Z. W.* **68**, 557–578.

[21] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev (1993) *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications.* Gordon and Breach Sciences Publishers.

[22] E.C. Titchmarsh (1948) *Introduction to the theory of Fourier Integrals.* 2^{nd} ed., Clarendon Press, Oxford.

[23] H. Trotter (1958) A property of brownian motion paths. *Illinois J. Math.* **2**, 425–433.

[24] T. Yamada (1984) On some representation concerning the stochastic integrals. *Proba. Math. Stat.* **4** (2), 153–166.

[25] T. YAMADA (1985) On the fractional derivative of the brownian local time. *J. Math. Kyoto Univ.* **25** (1), 49–58.

[26] T. YAMADA (1986) On some limit theorems for occupation times of one dimensional brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy. *J. Math. Kyoto Univ.* **26** (2), 309–322.

[27] T. YAMADA (1996) Principal values of Brownian local times and related topics. *In Itô's Calculus and probability Theory.* (N : Ikeda, S. Watanabe, N. Fukushima H. Kunita, eds.) pp. 413–422.

[28] M. YOR (1982) Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens et une extension de la formule de Itô. *Séminaire de Probabilités,* **XVI**, *Lect. Notes in Mathematics*, **920**, 238–247.